**FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO**

**Matematika 2**

**2. kolokvij**

**28. maj 2008**

**Ime in priimek:** ________________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

## Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

| **Naloga** | **a.** | **b.** | **Skupaj** |
|---|---|---|---|
| **1.** | | | |
| **2.** | | | |
| **3.** | | | |
| **4.** | | | |
| **Skupaj** | | | |

**1.** (25) Integrali:

a. (15) Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \frac{1-u^2}{(3+u^2)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u\,.$$

*Rešitev: Nastavek za parcialne ulomke lahko poenostavimo v*

$$\frac{1-u^2}{(3+u^2)(1+u^2)} = \frac{A}{3+u^2} + \frac{B}{1+u^2}\,.$$

*Dobimo enakost*

$$1-u^2 = A(1+u^2) + B(3+u^2)\,,$$

*od koder sledita enačbi*

$$A + 3B = 1 \qquad \textit{in} \qquad A + B = -1\,.$$

*Sledi* $A=-2$ *in* $B=1$. *Računamo*

$$\begin{aligned}\int \frac{1-u^2}{(3+u^2)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u &= \int \left(-\frac{2}{3+u^2} + \frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} u + C\,.\end{aligned}$$

*Ocenjevanje:*

- *Nastavek za parcialne ulomke: 3 točke.*
- *Enačbe: 3 točke.*
- *Konstante: 3 točke.*
- *Prvi integral: 3 točke.*
- *Drugi integrael: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2+\cos x}\,.$$

*Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko* $tg(x/2) = u$. *Vemo, da je*

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \textit{in} \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+u^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

*Sledi*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2+\cos x} &= \int_0^1 \frac{2(1-u^2)}{(3+u^2)(1+u^2)} \\ &= 2\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} u\right)\Bigg|_0^1 \\ &= -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

*Ocenjevanje:*

- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- d$x$*: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

**2.** (25) Naj bo $f(x) = \sin x$.

a. (10) Izračunajte prostornino vrtenine, ki jo dobimo z vrtenjem funkcije $f$ na intervalu $[0, \pi]$.

*Rešitev: Po formuli je*

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{2}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- Formula: 2 točki.
- Vstavljanje: 2 točki.
- Dvojni koti: 2 točki.
- Nedoločeni integral: 2 točki.
- Rezultat: 2 točki.

b. (15) Izračunajte površino vrtenine, ki nastane z vrtenjem $f(x)$ na intervalu $[0, \pi]$. Uporabite, da je

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{1+x^2})\right)\,.$$

*Rešitev: Po formuli je*

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\left(\cos x\sqrt{1+\cos^2 x} + \log(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x})\right)\right)\Big|_0^\pi \\ &= \pi\left(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - \log(-1+\sqrt{2})\right) \\ &= 2\pi(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))\,. \end{aligned}$$

*Ocenjevanje:*

- *Formula: 3 točke.*
- *Nova spremenlljivka: 3 točke.*
- *Namig: 3 točke.*
- *Vstavljanje mej: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

**3.** (25) Po zakonu o vplivu mas v kemiji je hitrost reakcije med dvema reagentoma odvisna od njune koncentracije. Če predpostavimo začetni koncentraciji $a$ in $b$ (v molih na volumsko enoto), in označimo z $y(t)$ količino nastale spojine (v molih), potem koncentracija $y$ ustreza diferencialni enačbi

$$y' = k(a-y)(b-y)\,,$$

kjer je $k$ primerna konstanta. Predpostavite še $0 < a < b$.

a. (15) Poiščite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

*Rešitev: Enačbo prepišemo v*

$$\frac{y'}{(a-y)(b-y)} = k\,.$$

*Obe strani integriramo (recimo z razstavljanjem na parcialne ulomke) in dobimo*

$$\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b-y}{a-y}\right) = kt + c\,.$$

*Ocenjevanje:*

- *Prepis enačbe v obliko z integriranje: 3 točke.*
- *Parcialni ulomki: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Konstanta: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev zgornje enačbe, ki ustreza začetnemu pogoju $y(0) = 0$.

*Rešitev: Konstanto $c$ določimo iz začetnega pogoja. Za $t = 0$ mora biti*

$$\frac{1}{b-a}\log(\frac{b}{a}) = c\,.$$

*Torej je rešitev podana z enačbo*

$$\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{a(b-y)}{b(a-y)}\right) = kt$$

*Izračunamo še $y$ iz zgornje enačbe in dobimo*

$$y(t) = \frac{ab(1-e^{-k(b-a)t})}{b-ae^{-k(b-a)t}}\,.$$

*Ocenjevanje:*

- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *$c$: 2 točki.*
- *Vstavljanje $c$ na pravo mesto: 2 točki.*
- *Izračun $y$: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

**4.** (25) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y'' + 2y' + 2y = 0\,.$$

a. (15) Poiščite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

*Rešitev: Ničli karakterističnega polinoma $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ sta*

$$\lambda_1 = -1 + i \qquad \textit{in} \qquad \lambda_2 = -1 - i\,.$$

*Splošna rešitev bo oblike*

$$y = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x\,.$$

*Ocenjevanje:*

- *Karakteristični polinom: 3 točke.*
- *Ničli: 3 točke.*
- *Prva rešitev: 3 točke.*
- *Druga rešitev: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev, ki ustreza začetnima pogojema $y(0) = 1$ in $y'(0) = 0$.

*Rešitev: Iz začetnih pogojev izhajata enačbi*

$$y(0) = c_1 = 1 \qquad \textit{in} \qquad y'(0) = -c_1 + c_2 = 0\,.$$

*Sledi $c_1 = 1$ in $c_2 = 1$. Iskana rešitev je*

$$y = e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x\,.$$

*Ocenjevanje:*

- *Prva enačba: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Druga enačba: 2 točki.*
- *Konstanti: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*