FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

2. kolokvij

28. maj 2008

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Integrali:

a. (15) Izračunajte nedoločni integral

$$\int \frac{1-u^2}{(1+3u^2)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u\,.$$

Rešitev: Nastavek za parcialne ulomke lahko poenostavimo v

$$\frac{1-u^2}{(1+3u^2)(1+u^2)} = \frac{A}{1+3u^2} + \frac{B}{1+u^2}\,.$$

Dobimo enakost

$$1-u^2 = A(1+u^2) + B(1+3u^2)\,,$$

od koder sledita enačbi

$$A+B=1 \qquad in \qquad A+3B=-1\,.$$

Sledi $A=2$ in $B=-1$. Računamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1-u^2}{(1+3u^2)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u &= \int\left(\frac{2}{1+3u^2} - \frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{3}\,u) - \mathrm{arctg}\,u + C\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za parcialne ulomke: 3 točke.*
- *Enačbe: 3 točke.*
- *Konstante: 3 točke.*
- *Prvi integral: 3 točke.*
- *Drugi integrael: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2-\cos x}\,.$$

Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko $tg(x/2)=u$. Vemo, da je

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad in \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+u^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2+\cos x} &= \int_0^1 \frac{2(1-u^2)}{(1+3u^2)(1+u^2)}\\ &= 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{3}\,u) - \mathrm{arctg}\,u\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- dx*: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3B

2. (25) Funkcija f naj bo dana z

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2}\,.$$

a. (10) Izračunajte p̌rostornino vrtenine, ki jo dobite, če graf zgornje funkcije na intervalu $[-1, 1]$ zavrtite okrog x-osi.

Rešitev: Po formuli je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} f^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \frac{83\pi}{30}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Kvadriranje: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte površino vrtenine, ki jo dobite, če graf zgornje funkcije na intervalu $[-1, 1]$ zavrtite okrog x-osi. Uporabite, da je

$$\int \sqrt{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{1 + x^2})\right)$$

in

$$\int x^2\sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2 + 1}\,\left(2x^3 + x\right) - \log(x + \sqrt{1 + x^2})\right)\,.$$

Rešitev: *Po formuli je*

$$
\begin{aligned}
P &= 2\pi \int_0^{\pi} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \left(1+\frac{x^2}{2}\right)\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\,\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{1+x^2})\right)\Big|_{-1}^{1} + \\
&\qquad \pi\,\frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2+1}\,\left(2x^3+x\right)-\log(x+\sqrt{1+x^2})\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{11\sqrt{2}}{4}\,\pi + \frac{7\log(1+\sqrt{2})}{4}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 3 točke.*
- *Nova spremenlljivka: 3 točke.*
- *Namig: 3 točke.*
- *Vstavljanje mej: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

3. (25) Dana je linearna diferencialna enačba prvega reda

$$y' + xy = g(x)\,.$$

a. (10) Zapišite splošno rešitev zgornje enačbe, če je $g(x) = 0$.

Rešitev: V primeru, ko je $g(x) = 0$ enačbo prepišemo v

$$\frac{y'}{y} = -x$$

in integriramo. Dobimo

$$\log(y) = -\frac{x^2}{2} + \log(c)$$

za poljubno konstanto ali

$$y(x) = ce^{-x^2/2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ločitev spremenljivk: 5 točk.*
- *Integral in rezultat: 5 točk.*

b. (15) Poiščite rešitev, ki ustreza pogoju $y(0) = 0$ in zgornji diferencialni enačbi za $g(x) = x$.

Rešitev: Potrebujemo partikularno rešitev. Po nastavku poiščemo funkcijo v, ki ustreza pogoju

$$v'(x) = xe^{x^2/2}\,.$$

Integriramo desno stran in dobimo

$$v(x) = e^{x^2/2}\,.$$

Partikularna rešitev bo $u \cdot v$, kjer je u rešitev homogene enačbe, torej konstanta 1. Rešitev, ki bo ustrezala začetnemu pogoju in nehomogeni enačbi, iščemo z nastavkom

$$y(x) = 1 + ce^{-x^2/2}\,.$$

Vstavimo $x = 0$ in dobimo enačbo $1 + c = 0$, torej je iskana rešitev

$$y(x) = 1 - e^{-x^2/2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek z variacijo konstante: 3 točke.*
- *Odvod v: 3 točke.*
- *Intergriranje: 3 točke.*
- *Enačba za konstanto c: 3 točke.*
- *Končna rešitev: 3 točke.*

4. (25) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y'' + 4y' + 5y = 0\,.$$

a. (15) Poiščite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Ničli karakterističnega polinoma $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ *sta*

$$\lambda_1 = -2 + i \qquad \textit{in} \qquad \lambda_2 = -2 - i\,.$$

Splošna rešitev bo oblike

$$y = c_1 e^{-2x}\cos x + c_2 e^{-2x}\sin x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 3 točke.*
- *Ničli: 3 točke.*
- *Prva rešitev: 3 točke.*
- *Druga rešitev: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev, ki ustreza začetnima pogojema $y(0) = 1$ in $y'(0) = 0$.

Rešitev: Iz začetnih pogojev izhajata enačbi

$$y(0) = c_1 = 1 \qquad \textit{in} \qquad y'(0) = -2c_1 + c_2 = 0\,.$$

Sledi $c_1 = 1$ *in* $c_2 = 2$. *Iskana rešitev je*

$$y = e^{-2x}\cos x + 2\,e^{-2x}\sin x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prva enačba: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Druga enačba: 2 točki.*
- *Konstanti: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*