2. kolokvij iz Matematike 2b

Fakulteta za strojništvo

20. maj 2009

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Ugotovite, za katere vrednosti realnih parametrov a in b je sistem nedoločen. V tem primeru zapišite splošno rešitev.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & a \\ 2x & + & 3y & + & z & + & t & = & 1 \\ 6x & + & 10y & + & 4z & + & 5t & = & 6 \\ 3x & + & by & + & 2z & + & 2t & = & 2 \end{array}$$

Rešitev: Z uporabo Cramerjevega pravila dobimo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 10 & 4 & 5 \\ 3 & b & 2 & 2 \end{vmatrix} = b - 5,$$

zato ima sistem v primeru, ko je $b \neq 5$ enolično rešitev. Ostane nam samo še možnost, da je $b = 5$. Ta primer rešimo z Gaussovo metodo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 10 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2a+1 \\ 0 & -2 & -2 & -7 & -6a+6 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -3a+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2a+1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2a+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}.$$

Sistem je nedoločen, ko bo $b = 5$ in $a = 3$. V tem primeru je splošna rešitev enaka $x = z + 1$, $y = -z - 1$, $t = 2$ in $z \in \mathbb{R}$.

2. (25) Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbo

$$2A + X - BX = C - 3AX.$$

Rešitev: Najprej iz dane matrične enačbe izrazimo X:

$$X = (I - B + 3A)^{-1}(C - 2A).$$

Ker pa je $I - B + 3A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$ *in* $C - 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$, *sledi*

$$X = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} 21 & 16 \\ -4 & -34 \end{bmatrix}.$$

3. (25) Določite realni števili a in b, da bo imela matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 3 \\ b & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

lastni vrednosti 2 in -2. Izračunajte še tretjo lastno vrednost in lastni vektor, ki ji pripada.

Rešitev: Ker je $\lambda_1 = 2$ lastna vrednost matrike A, mora veljati

$$\det(A - 2I) = 0,$$

zato

$$3 + 6b + 3ab = 0.$$

Podobno pri $\lambda_2 = -2$ dobimo enačbo

$$-9 + 6b - ab = 0$$

Sistem enačb ima rešitvi $a = -3$ in $b = 1$. Preostalo lastno vrednost dobimo iz enačbe

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0.$$

Sledi $\lambda_3 = 1$. Lastni vektor, ki ji pripada je $\overrightarrow{x} = (-2, 1, 2/3)$.

4. (25) Rešite linearno diferencialno enačbo prvega reda

$$y' - 6x^2 y = 5x^4 e^{2x^3}$$

in nato poiščite tisto rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju $y(0) = 4$.

Rešitev: Najprej rešimo ustrezno homogeno enačbo $y' = 6x^2\, y$. Ločimo spremenljivki in dobimo

$$\int \frac{dy}{y} = \int 6x^2\, dx,$$

$$y = C\, e^{2x^3}.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y = C(x)\, e^{2x^3}$. Tako dobimo enačbo

$$C'(x) = 5x^4,$$

oziroma

$$C(x) = x^5.$$

Splošna rešitev naše diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = C\, e^{2x^3} + x^5\, e^{2x^3}$$

Z vstavljanjem začetnega pogoja dobimo $C = 4$, torej je rešitev enaka

$$y(x) = e^{2x^3}(x^5 + 4).$$