FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

2. kolokvij

7. marec, 1997

Ime in priimek: ______________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Za $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ definirajmo funkcijo

$$f(x, y, z) = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

Naj bo $\mathbf{F} = \mathbf{grad}(f)$.

a. (10) Krivulja $\mathcal{C}$ v $\mathbb{R}^3$ naj bo dana s koordinatnimi funkcijami

$$x(t) = \sin t \cos t \qquad y(t) = \sin^2 t \qquad \text{in} \qquad z(t) = \cos t$$

za $0 \leq t \leq \pi$. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{r} .$$

Rešitev: Izračunati je potrebno integral

$$\int_0^\pi (F_1 \dot{x} + F_2 \dot{y} + F_3 \dot{z}) \, \mathrm{d}t .$$

Izračunamo

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= \frac{-kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ F_2(x, y, z) &= \frac{-ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ F_3(x, y, z) &= \frac{-kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} . \end{aligned}$$

Zlahka se prepričamo, da je $x^2(t) + y^2(t) + y^2(t) = 1$, tako da zgornji integral postane

$$-k \int_0^\pi (\sin t \cos t(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2 \sin^2 t \sin t \cos t - \cos t \sin t) \, \mathrm{d}t = 0 ,$$

ker je izraz v oklepaju enak 0. Opomba: Vektorsko polje $\mathbf{F}$ je potencialno, zato je integral enak razliki vrednosti funkcije f v začetni in končni točki, kar je 0.

b. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi zgornjo polovico površine krogle s središčem v izhodišču in polmerom 1. Normala naj kaže iz krogle.

Rešitev: Poiskati moramo primerno parametrizacijo zgornje polovice površine krogle. Ena možnost je

$$\Phi(u,v) = (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)^T$$

za $0 \le u \le 2\pi$ *in* $0 \le v \le \pi/2$. *S predavanj vemo, da je*

$$\Phi_u \times \Phi_v = -\sin v(\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)^T\,,$$

ki pa je normala, ki kaže v kroglo in jo moramo zato pomnožiti z -1. Torej je

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -k \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^{\pi/2} \sin v \, \mathrm{d}v = -2\pi k\,.$$

Pri tem smo upoštevali, da je

$$F_1(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v), \Phi_3(u,v)) = -k \cos u \sin v$$

in podobno za F_2 in F_3.

2. (20) Naj bosta $\mathbf{F}$ in $\mathbf{G}$ vektorski polji na neki odprti množici $G \subset \mathbb{R}^3$.

a. (10) Dokažite, da je

$$\mathrm{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{G}\,.$$

Rešitev: Nalogo rešimo tako, da izračunamo levo in desno stran zgornje enakosti *in ugotovimo, da sta enaki.*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= \frac{\partial(F_2G_3-F_3G_2)}{\partial x}+\frac{\partial(F_3G_1-F_1G_3)}{\partial y}+\frac{\partial(F_1G_2-F_2G_1)}{\partial z}\\
&= \frac{\partial F_2}{\partial x}G_3-\frac{\partial F_3}{\partial x}G_2+F_2\frac{\partial G_3}{\partial x}-F_3\frac{\partial G_2}{\partial x}\\
&+ \frac{\partial F_3}{\partial y}G_1-\frac{\partial F_1}{\partial y}G_3+F_3\frac{\partial G_1}{\partial y}-F_1\frac{\partial G_3}{\partial y}\\
&+ \frac{\partial F_1}{\partial z}G_2-\frac{\partial F_2}{\partial z}G_1+F_1\frac{\partial G_2}{\partial z}-F_2\frac{\partial G_1}{\partial z}\\
&= G_1(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z})+G_2(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x})+G_3(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y})\\
&- F_1(\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z})-F_2(\frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x})-F_3(\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y})\\
&= \mathbf{G}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{F}-\mathbf{F}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{G}\,.
\end{aligned}
$$

b. (10) Naj bo v **a.** vektorsko polje $\mathbf{G}$ potencialno, torej $\mathbf{G}=\mathbf{grad}\,g$ za neko zvezno odvedljivo funkcijo g. Kako se poenostavi zgornja formula?

Rešitev: Če je polje $\mathbf{G}$ *potencialno, je* $\mathbf{rot}(\mathbf{G})=\mathbf{0}$*, tako da v zgornji formuli ostane samo prvi člen.*

3. (20) Naj bo na $\mathbb{R}^3$ dano vektorsko polje $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$.

a. (10) Naj bo $K=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. Izračunajte pretok $\mathbf{F}$ skozi ploskve K, ki ležijo v koordinatnih ravninah. Za normalo si vedno izberite vektor, ki kaže v smeri ene od koordinatnih osi.

Rešitev: Izračunajmo najprej pretok skozi ploskev $\mathcal{S}_1$*, ki leži v* xy*–ravnini. Normala na to ploskev je* $\mathbf{k}$ *in dobimo*

$$\int_{\mathcal{S}_1}\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_{Q_1}xy\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\,.$$

Pri tem je $Q_1 = [0,1] \times [0,1]$*, integral na desni pa zlahka izračunamo po Fubinijevem izreku. Upoštevali smo tudi, da je* $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$*. Popolnoma na enak način izračunamo še pretok skozi ostali dve ploskvi. Končni rezultat je* $\frac{3}{4}$.

b. (10) Z uporabo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev, ki je graf funkcije $z = f(x,y) = 1 - x - y$ na območju $G = \{(x,y)\colon x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 1\}$. Za normalo si izberite vektor $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Rešitev: Z odvajanjem ugotovimo $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 0$*. Po Gaussovem izreku je potem*

$$\int_{\partial\Delta} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Delta} \mathrm{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

kjer je Δ *piramida, ki jo omejujejo dana ploskev in koordinatne ravnine. Pretok skozi dano ploskev je torej enak pretoku skozi ostale tri ploskve z nasprotnim predznakom. Izračunajmo recimo pretok skozi* G*, ki je ena od ploskev piramide. Normala je zdaj* $-\mathbf{k}$ *in tako*

$$\int_G \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{24}\,.$$

Zaradi simetrije je pretok enak skozi ostali dve ploskvi piramide in je tako iskani pretok enak $-3 \cdot \frac{-1}{24} = \frac{1}{8}$.

4. (20) Naj bo $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ in naj bo ploskev $\mathcal{S}$ del površine krogle s polmerom R, ki leži v delu $\mathbb{R}^3$, v katerem so vse tri koordinate nenegativne.

a. (10) Izračunajte

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

z uporabo Stokesovega izreka. Za normalo si izberite tisto, ki kaže iz krogle.

Rešitev: Izračunamo najprej

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\,.$$

Najlaže je izračunati ploskovni integral, če ploskev predstavimo kot graf funkcije $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ na območju $G = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$. Dobimo

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \mathrm{d}\mathbf{S} = -2 \int_G \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = -\frac{R^2\pi}{2}\,.$$

b. (10) Preverite rezultat v **a.** tako, da krivuljni integral

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{r}$$

izračunate direktno.

Rešitev: Krivuljni integral je sestavljen iz treh delov. Najprej izračunajmo del krivuljnega integrala v xy–ravnini. Primerna parametrizacija četrtine kroga s polmerom R je

$$x(t) = R\cos t \qquad y(t) = R\sin t \qquad \text{in} \qquad z(t) = 0$$

za $0 \le t \le \pi/2$. Izračunamo

$$\int_0^{\pi/2} (-R^2 \sin^2 t - R^2 \cos^2 t) \,\mathrm{d}t = -\frac{R^2\pi}{2}\,.$$

Podobno dobimo za del krivulje v yz–ravnini parametrizacijo

$$x(t) = 0 \qquad y(t) = R\cos(t) \qquad \text{in} \qquad z(t) = R\sin t$$

in je zato krivuljni integral po tem delu

$$\int_0^{\pi/2} R^2 \sin t \cos t \,\mathrm{d}t = -\frac{R^2}{2}\,.$$

Nazadnje dobimo še za del krivulje v del v xz–ravnini parametrizacijo

$$x(t) = R\sin t \qquad y(t) = 0 \qquad \text{in} \qquad z(t) = R\cos t$$

in krivuljni integral

$$-\int_0^{\pi/2} R^2 \cos t \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{R^2}{2}\,.$$

Ko seštejemo vse tri dele dobimo $-\frac{R^2\pi}{2}$. Parametrizacija je vedno taka, da del krivulje pretečemo tako, da je ploskev na levi (pri izbrani normali).

5. (20) V Eulerjevih enačbah za idealno tekočino smo srečali izraz

$$\mathbf{L_V} \cdot \mathbf{V} = \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}\,,$$

pri čemer je $\nabla \mathbf{V}$ matrika z

$$(\nabla \mathbf{V})_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\,.$$

Tukaj je $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

a. (10) Dokažite, da je

$$\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{2}\mathbf{grad}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{V} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{V}\,.$$

Rešitev: Na predavanjih smo $\nabla \mathbf{V}$ označili z $\mathbf{L_V}$. Enakost preverimo po komponentah. Tako leva, kot desna stran enačbe sta namreč vektorja. Prva komponenta na levi je enaka

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y}V_2 + \frac{\partial V_1}{\partial z}V_3\,.$$

Izračunajmo še prvo komponento $\frac{1}{2}\mathbf{grad}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})$, torej odvajamo parcialno po x. Dobimo

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}V_1 + \frac{\partial V_2}{\partial x}V_2 + \frac{\partial V_3}{\partial x}V_3\,.$$

Nazadnje izračunajmo še prvo komponento $\mathbf{V} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{V}$. Dobimo

$$V_2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) - V_3\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right).$$

Ko seštejemo prvi komponenti vektorjev na desni, dobimo prvo komponento vektorja na levi. Podobno preverimo enakost za ostale komponente.

b. (10) Zapišite Eulerjeve enačbe za stacionarni tok idealne tekočine, če privzamete, da je $\mathbf{V} = \mathbf{grad}\,\phi$ za

$$\phi(x, y, z) = -kx^2\,.$$

Namig: Uporabite **a.**, *tudi če ne znate dokazati.*

Rešitev: Pri stavionarnem toku je $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0$ *in* $\mathbf{rot}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$, *ker je* $\mathbf{V}$ *gradient neke funkcije. Uporabimo* **a.** *in dobimo, da je*

$$\rho\mathbf{F} - \mathbf{grad}(p) = \frac{\rho}{2}\,\mathbf{grad}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V})\,,$$

kar se, če upoštevamo še, kaj je ϕ *poenostavi v*

$$\rho\mathbf{F} - \mathbf{grad}(p) = \rho(4k^2x, 0, 0)^T\,.$$