FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

2. kolokvij

7. marec, 1997

Ime in priimek: ______________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Vektorsko polje $\mathbf{F}$ gravitacijskih sil naj bo dano s komponentami

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= -\frac{x}{r}(1+2R^3/r^3) \\ F_2(x,y,z) &= -\frac{y}{r}(1+2R^3/r^3) \\ F_3(x,y,z) &= -\frac{z}{r}(1+2R^3/r^3)\,, \end{aligned}$$

kjer je $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $r > R$ in je $R > 0$ dana konstanta.

a. (10) Kakšno delo opravimo, če prenesemo točkasto maso m iz točke $(0,0,R)$ v točko $(0,0,2R)$ vzdolž z-osi?

b. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi površino krogle s središčem v izhodišču in polmerom $R_1 > R$. Za normalo si izberite tisto, ki kaže iz krogle.

2. (20) Naj bosta $\mathbf{F}$ in $\mathbf{G}$ dvakrat zvezno odvedljivi vektorski polji definirani na odprti podmnožici $G \subset \mathbb{R}^3$.

a. (10) Predpostavite, da je $\mathbf{F} = \mathbf{grad}(f)$ in $\mathbf{G} = \mathbf{grad}(g)$ za dvakrat zvezno odvedljivi funkciji f in g na G. Dokažite, da je

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = 0\,.$$

b. (10) Naj bo $f(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ in $\mathbf{F} = \mathbf{grad}(f)$. Pokažite, da je

$$\mathbf{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{F}) = 2\mathbf{a}$$

za fiksen vektor $\mathbf{a}$.

3. (20) Naj bo na $\mathbb{R}^3$ dano vektorsko polje $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

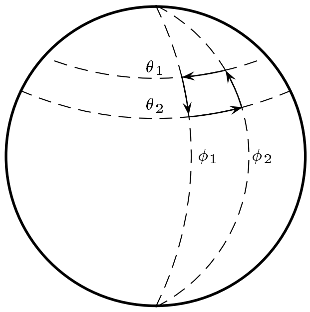
a. (10) Z uporabo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja skozi ploskve piramide omejene s koordinatnimi ravninami in ravnino $z = 1 - x - y$, torej $G = \{(x, y, z)\colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 1 - x - y\}$. Vedno si izberite normalo, ki kaže iz piramide.

b. (10) Z uporabo Gaussovega izreka (ali drugače) izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev, ki je graf funkcije $z = f(x, y) = 1 - x - y$ na območju $G = \{(x, y)\colon x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 1\}$. Za normalo si izberite vektor $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

4. (20) Vektorsko polje $\mathbf{F}$ naj bo dano s komponentami

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= 2x - y \\ F_2(x,y,z) &= -yz^2 \\ F_3(x,y,z) &= -y^2 z \end{aligned}$$

a. (10) Z uporabo Stokesovega izreka izračunajte krivuljni integral po robu dela krogle s polmerom R med zemjepisnima širinama θ_1 in θ_2 in zemljepisnima dolžinama ϕ_1 in ϕ_2. Orientacija naj bo v smeri nasprotni urinemu kazalcu kot na spodnji sliki.



b. (10) Izračunajte še krivuljni integral $\oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{F}, \mathbf{n})\, \mathbf{n}\, d\mathbf{r}$ po isti krivulji kot zgoraj, kjer je $\mathbf{n}$ zunanja normala na ploskev.

5. (20) Kontinuitetna enačba za tok fluida pravi, da je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$$

kjer je ρ gostota in $\mathbf{V}$ hitrost toka fluida.

a. (10) Predpostavite, da za stisljiv fluid velja enačba $p = c\rho^\gamma$ za dani konstanti c in γ, kjer je p tlak. Pokažite, da velja enačba

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{grad}(p) \cdot \mathbf{V} + \gamma p \,\mathrm{div}(\mathbf{V}) = 0\,.$$

b. (10) Predpostavite, da se p in $\mathbf{V}$ ne spreminjata s časom in je $\mathbf{V} = (-\omega y, \omega x, 0)^T$ za primeren $\omega \neq 0$. Pokažite, da iz enačbe v **a.** (tudi, če je ne znate dokazati) sledi

$$-y\frac{\partial p}{\partial x} + x\frac{\partial p}{\partial y} = 0\,.$$