FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

3. kolokvij

1. april 1999

REŠITVE

Ime in priimek: ____________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (25) Vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$ naj bo dano z

$$\mathbf{F} = (y\cos(xy) + z\cos(xz), x\cos(xy) + z\cos(yz), x\cos(xz) + y\cos(yz)) .$$

a. (15) Preverite, da je polje potencialno in izračunajte potencial.

Rešitev: Najprej izračunamo $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$. *Dobimo*

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \cos(yz) - yz\sin(yz) - \cos(yz) + yz\sin(yz) \\ \cos(xz) - xz\sin(xz) - \cos(xz) + xz\sin(xz) \\ \cos(xy) - xy\cos(xy) - \cos(xy) + xy\sin(xy) \end{pmatrix} = 0 .$$

Ker je polje definirano in zvezno odvedljivo na vsem prostoru, je potencialno. a izračun potenciala imamo več možnosti. Ena možnost je

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) &= \int_0^1 (F_1(xt,yt,zt)\cdot x + F_2(xt,yt,zt)\cdot y + (F_3(xt,yt,zt)\cdot z)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big(2xy\cos(t^2xy)\cdot t + 2zx\cos(t^2xz)\cdot t + 2zy\cos(t^2zy)\cdot t\Big)\ \mathrm{d}t \\ &= \sin(xy) + \sin(xz) + \sin(yz) \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Izračun rotorja: 3 točke.*
- *Sklep na podlagi rotorja: 3 točke.*
- *Nastavek za izračun potenciala: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Naj bo $\mathcal{C}$ krivulja dana parametrično z $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t \sin t)$ za $0 \le t \le \pi$. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\ \mathrm{d}\mathbf{r} \qquad \text{in} \qquad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\ \mathrm{d}\mathbf{r} .$$

Rešitev: Za izračun imamo več možnosti. Najpreprostejša je ta, da uporabimo a. in ugotovimo

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\ \mathrm{d}\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(\pi)) - \phi(\mathbf{r}(0)) = 0 .$$

Drugi integral je 0, ker je $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = 0$.

Ocenjevanje:

- *Ideja s potencialom: 5 točk.*
- *Vstavljanje: 3 točke.*
- *Integral z rotorjem: 3 točke.*
- *Alternativne rešitve: Po presoji.*

2. (25) Naj bo P "četrtinka" krogle $P = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ in naj bo dana ploskev $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$ naj bo dano z $\mathbf{F} = (z^2, x^2, y^2)$.

a. (15) Izračunajte

$$\int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{r} \,,$$

kjer za $\mathbf{n}$ izberemo vektor, ki kaže iz telesa P.

Rešitev 1: Izračunajmo najprej krivuljni integral po delu poti v xz-ravnini. Parametrizacija tega dela je $\mathbf{r}(t) = (\sin t, 0, \cos t)$ za $0 \leq t \leq \pi$. Vstavimo in dobimo

$$I_1 = \int_0^{\pi} -\cos^3 t \, \mathrm{d}t = 0 \,.$$

Izračunamo še integral po delu krivulje v yz-ravnini. Ustrezna parametrizacija je $\mathbf{r}(t) = (0, \sin t, -\cos t)$ za $0 \leq t \leq \pi$. Dobimo

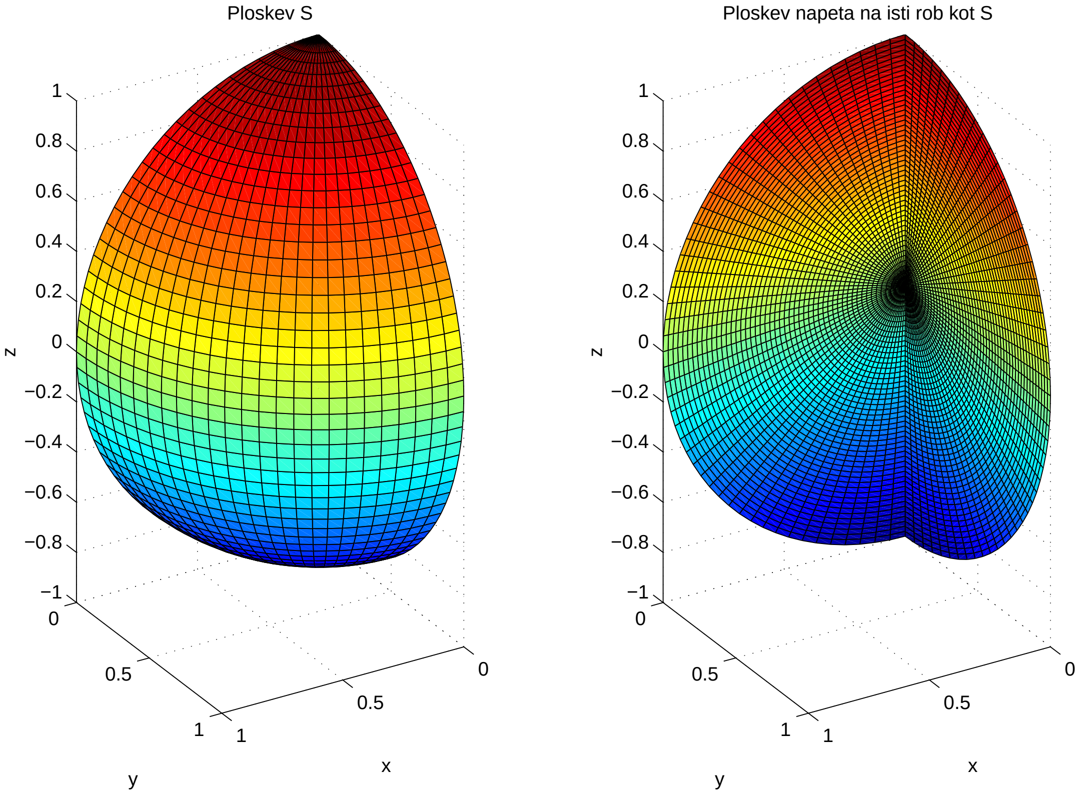
$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin^3 t \, \mathrm{d}t = \frac{4}{3} \,.$$

Celoten pretok je $4/3$.

Ocenjevanje:

- *Razbitje integrala na tri dele: 3 točke.*
- *Parametrizacija vsakega dela: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje: 3 točke.*
- *Integral po vsakem delu: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

Rešitev 2: Izračunamo $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (2y, 2z, 2x)$. Vemo, da je krivuljni integral enak pretoku rotorja, ne glede na to, katero ploskev "napnemo" na krivuljo. Na sliki 1 je ploskev $\mathcal{S}$ in ploskev, ki si jo lahko izberemo namesto nje.



Sl. 1 Dve možni ploski, ki ju lahko "napnemo" na ∂S.

Ugotovimo, da je

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{S} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Oglejmo si najprej del površine krhlja v xz-ravnini. Normala je $(0,1,0)$ in dobimo za pretok formulo

$$\int_{\partial P \cap y=0} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{x^2+z^2 \leq 1, x \geq 0} (2z)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}z\,.$$

Zaradi simetrije je integral enak 0. Za površino krhlja v yz-ravnini vzamemo normalo $(1,0,0)$ in dobimo

$$\int_{\partial P \cap x=0} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{y^2+z^2 \leq 1, y \geq 0} 2y\, \mathrm{d}y \mathrm{d}z\,.$$

Z uporabo polarnih koordinat dobimo rezultat $4/3$.

Ocenjevanje:

- *Izračun rotorja: 3 točke.*
- *Uporaba Stokesovega izreka: 3 točke.*
- *Izračun integralov po stranskih ploskvah: 6 točk.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Rešitev: Najprej izračunamo $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 0$. *Pretok vektorskega polja skozi ploskev* $\mathcal{S}$ *je po Gaussovem izreku enak negativnemu pretoku skozi ostali dve ploskvi (polovici krogov) telesa* P *v* xz*-ravnini in* yz*-ravnini. Oglejmo si najprej pretok skozi del* ∂P *v* xz*-ravnini. Za normalo si izberemo* $(0,-1,0)$ *in dobimo z vpeljavo polarnih koordinat*

$$\begin{aligned} \int_{\partial P \cap y=0} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{x^2+z^2 \le 1, x \ge 0} (-x^2)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}z \\ &= -\frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Enak integral dobimo za drugo ploskev, zato je

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izračun divergence: 2 točki.*
- *Sklep s stranskimi ploskvami in Gaussovim izrekom: 2 točki.*
- *Izračun pretoka skozi stranske ploskve: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Naj bo

$$D = \{(x,y,z) : x^2 \le a^2, y^2 \le b^2, z^2 \le c^2\}$$

in naj bo dana ploskev $\mathcal{S} = \partial D \cap \{x^2 < a^2\}$. Vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$ naj bo dano z $\mathbf{F} = (x^2 + z^2, ay - xy, z^2 x)$.

a. (10) Izračunajte

$$\int_D \operatorname{div}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}V\,.$$

Rešitev: Najprej izračunamo $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = x + a + 2xz$. *Območje integracije je kvader* $D = [-a,a] \times [-b,b] \times [-c,c]$. *Računamo*

$$\begin{aligned} \int_D (x + a + 2xz)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= a \cdot 8abc \\ &= 8a^2bc \end{aligned}$$

Uporabili smo dejstvo, da je konstantni člen edini, ki se ne integrira v 0.

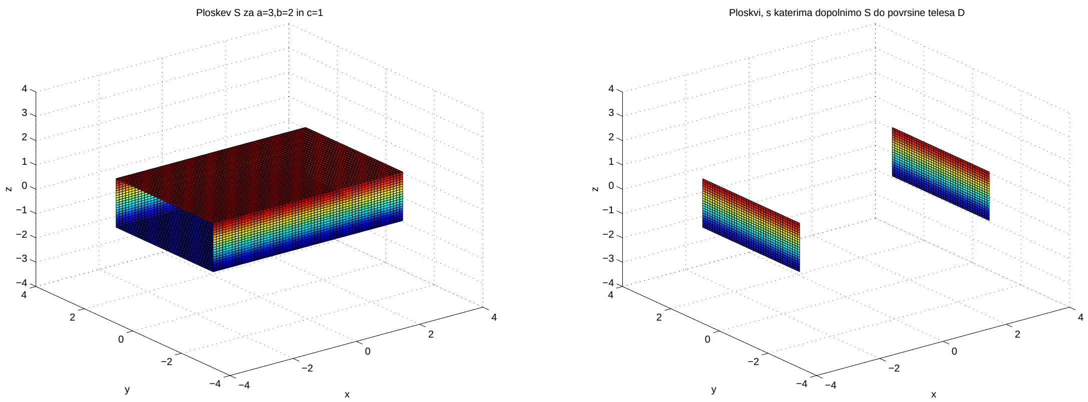
Ocenjevanje:

- *Izračun divergence: 4 točke.*
- *Nastavek za integral: 3 točke.*
- *Razultat: 3 točke.*

b. (15) Z uporabo Gaussovega izreka izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Rešitev: Ploskev $\mathcal{S}$ *lahko "zapremo" s stranskima ploskvama kvadra, za kateri je* $x = \pm a$, *kot je prikazano na sliki 2.*



Sl. 2 Ploskev $\mathcal{S}$ *in ploskvi, s katerima "zapremo"* $\mathcal{S}$ *do* ∂D.

Pretok skozi celotno površino kvadra je po a. in po Gaussovem izreku enak a^2bc. *Pretok skozi* $\mathcal{S}$ *dobimo tako, da odštejemo pretok skozi dodani ploskvi. Če je* $x = a$ *izberemo za normalo* $(1, 0, 0)$ *in za pretok dobimo integral*

$$\int_{[-b,b]\times[-c,c]} (a^2 + z^2)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Če je $x = -a$, *vzamemo za normalo* $(-1, 0, 0)$ *in dobimo enak integral, vendar z nasprotnim predznakom. Celoten pretok skozi dodani ploskvi je 0, pretok skozi* $\mathcal{S}$ *pa je tako enak* a^2bc.

Ocenjevanje:

- *Ideja z "zapiranjem": 3 točke.*
- *Uporaba Gaussovega izreka: 3 točke.*
- *Nastavka za izračun pretoka skozi dodani ploskvi: 3 točke.*
- *Izračun pretoka skozi dodani ploskvi: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Hitrost stacionarnega (neodvisnega od časa) toka fluida okrog okrogle ovire z polmerom 1 na območju $D = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \geq 1\}$ opisuje polje

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Naj bo $\phi(x,y,z) = x + x/(x^2+y^2)$ in $\psi(x,y,z) = y - y/(x^2+y^2)$. Preverite, da je

$$\mathbf{u} = \nabla\phi \qquad \text{in} \qquad u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y}, u_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Uporabite ta rezultat za izračun $\mathrm{div}(\mathbf{u})$.

Rešitev: Preverjanje je vaja iz parcialnega odvajanja. Po formuli je

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbf{u}) &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je vrstni red odvajanja nepomemben.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje potencialnosti: 2 točki.*
- *Preverjanje ostalih odvodov: 2 točki.*
- *Ideja za izračun divergence: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) S kakšnim pospeškom se fluid giblje v točki $T(0,2,0)$?

Namig: Izračunajte najprej $\mathbf{u}(0,2,0)$.

Rešitev: Vstavimo točko $T(0,2,0)$ *in dobimo* $\mathbf{u}(0,2,0) = (5/4,0,0)$. *Izračunati moramo* $\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ *v točki* $T(0,2,0)$. *Računamo*

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pospešek je produkt $\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$, *vendar opazimo, da potrebujemo samo člena* $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ *in* $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, *ker ostali ne nastopajo v produktih. Računamo*

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(0,2,0) = 0,$$

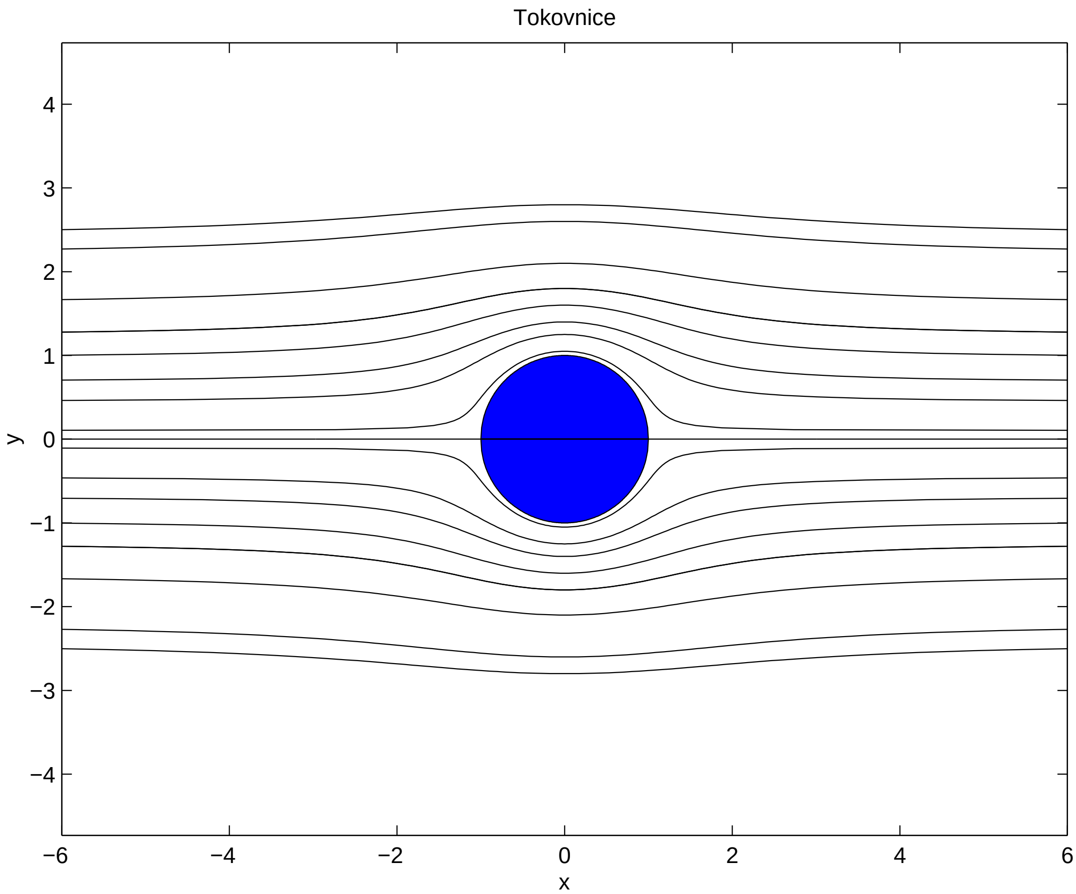
ker je funkcija soda in

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(0,2,0) = -\frac{1}{4}\,.$$

Končni rezultat je

$$\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-5}{16} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Na sliki 3 so tokovnice, ki pripadajo hitrostnemu polju $\mathbf{u}$.



Sl. 3 Tokovnice polja $\mathbf{u}$.

Ocenjevanje:

- *Formula za pospešek: 3 točke.*
- *Izračun* $\mathbf{u}$*: v dani točki: 3 točke.*
- *Izračun* $\nabla\mathbf{u}$ *v potrebnih točkah: 3 točke.*
- *Množenje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*