FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

3. kolokvij

13. april 2001

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

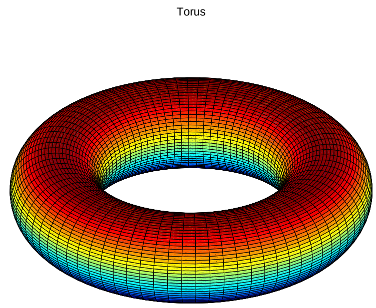
Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Površino torusa s polmeroma a in b lahko predstavimo parametrično s

$$\Phi(u,v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$$

za $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$. Na sliki 1 je površina torusa.



Sl. 1 Površina torusa.

a. (10) Napišite enačbo tangentne ravnine na torus v točki $T((a+b/\sqrt{2}),(a+b/\sqrt{2}),b)/\sqrt{2}$.

Rešitev: Brž uganemo, da je točka T enaka $\Phi(\pi/4,\pi/4)$. Normala na torus v točki bo dana z $\Phi_u \times \Phi_v$. Računamo

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} -(a+b\cos v)\sin u \\ (a+b\cos v)\cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

in

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} -b\sin v\cos u \\ -b\sin v\sin u \\ b\cos v \end{pmatrix}.$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = b(a+b\cos v)\cdot(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v).$$

Mimogrede še opazimo, da je

$$|\Phi_u \times \Phi_v| = b(a+b\cos v).$$

Vstavimo $u = v = \pi/4$ in dobimo

$$\mathbf{n} = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}).$$

Enačba tangentne ravnine bo torej

$$(x - (a+b/\sqrt{2})/\sqrt{2})/2 + (y - (a+b/\sqrt{2})/\sqrt{2}) + (z - b/\sqrt{2})/\sqrt{2} = 0.$$

Ocenjevanje:

- Φ_u : *2 točki.*
- Φ_v : *2 točki.*
- $\Phi_u \times \Phi_v$: *2 točki.*
- $\mathbf{n}$: *2 točki.*
- *Enačba ravnine: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F} = (x, y, 2z)$ skozi površino torusa.

Rešitev: Po formuli je

$$
\begin{aligned}
Flux &= \int_G \mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= b \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \left[(a + b\cos v)^2 \cos v + 2b(a + b\cos v)\sin^2 v \right] \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= 2\pi b \int_0^{2\pi} \left[a^2 \cos v + 2ab\cos^2 v + b^2 \cos^3 v + 2ab \sin^2 v + 2b^2 \cos v \sin^2 v \right] \, \mathrm{d}v \\
&= 2\pi b \cdot (2\pi ab + 2\pi ab) \\
&= 8\pi^2 ab^2 .
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 3 točke.*
- *Vstavljanje: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Končna formula: 3 točke.*

2. (25) Naj bosta $u, v \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno parcialno odvedljivi funkciji.

a. (10) Utemeljite, da za vsako območje G v $\mathbb{R}^3$ z gladkim robom velja

$$\int_G \Delta u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{\partial G} \nabla u \, \mathrm{d}\mathbf{S} \,,$$

kjer je $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

Rešitev: Na desni strani je ploskovni integral vektorskega polja $\mathbf{F} = \nabla u$. Po Gaussovem izreku lahko ta ploskovni integral pretvorimo v trojni integral divergence. Opazimo

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = (u_x)_x + (u_y)_y + (u_z)_z = \Delta u \,.$$

Trditev zdaj seveda sledi iz Gaussovega izreka.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je $\mathbf{F} = \nabla u$: 2 točki.*
- *Izračun divergence: 2 točki.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Uporaba Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Pokažite še, da velja Lagrangeova identiteta

$$\int_G (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{\partial G} (\nabla u \cdot v - u \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}\mathbf{S} \,.$$

Namig: Kaj je $\operatorname{div}(\nabla u \cdot v)$ in $\operatorname{div}(u \cdot \nabla v)$?

Rešitev: Za vektorsko polje $\mathbf{F}$ si izberimo $\nabla u \cdot v$. Računamo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{F}) &= (u_x v)_x + (u_y v)_y + (u_z v)_z \\ &= u_{xx} v + u_x v_x + u_{yy} v + u_y v_y + u_{zz} v + u_z v_z \\ &= \Delta u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v \,. \end{aligned}$$

Podobno dobimo, če si izberemo $\mathbf{G} = u \cdot \nabla v$

$$\operatorname{div}(\mathbf{G}) = u \cdot \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v \,.$$

Uporabimo Gaussov izrek posebej za polje $\mathbf{F}$ in posebej za polje $\mathbf{G}$. Dobimo

$$\int_{\partial} \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_G (\Delta u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

in podobno

$$\int_{\partial} \mathbf{G} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_G (u \cdot \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,.$$

Integrala odštejemo in dobimo želeno identiteto.

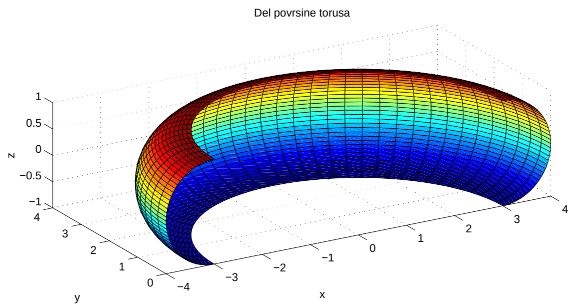
Ocenjevanje:

- *Divergenca prvega polja: 3 točki.*
- *Divergenca drugega polja: 3 točki.*
- *Uporaba Gaussovega izreka: 3 točki.*
- *Ideja z odštevanjem: 3 točki.*
- *Sklep: 3 točki.*

3. (25) Površino torusa s polmeroma a in b lahko predstavimo parametrično s

$$\Phi(u,v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$$

za $(u,v) \in [0,2\pi] \times [-\pi,\pi]$. Na sliki 2 je del površine torusa za $(u,v) \in [0,\pi] \times [-\pi/2,\pi/2]$. Označimo ta del ploskve z $\mathcal{S}$. Za normalo si izberite vektor, ki kaže iz torusa.



Sl. 2 Del površine torusa.

a. (10) Naj bo

$$\mathbf{F} = \frac{(y,-x,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

S pomočjo Stokesovega izreka izračunajte

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Rešitev: Po Stokesovem izreku je krivuljni integral enak pretoku rotorja vektorskega polja skozi ploskev $\mathcal{S}$. Brž ugotovimo, da je

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = -\frac{(0,0,1)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Po formuli za pretok vektorskega polja dobimo, da je

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_G \mathrm{rot}(\mathbf{F})\cdot(\Phi_u \times \Phi_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Ker je le zadnja komponenta $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ različna od 0, potrebujemo le zadnjo komponento vektorskega produkta $\Phi_u \times \Phi_v$, ki je

$$b(a + b\cos v)\sin v\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= -\int_G b\sin v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Krivuljni integral je enak 0.

Ocenjevanje:

- *Citiranje Stokesovega izreka: 2 točki.*
- *Izračun rotorja: 2 točki.*
- *Formula za pretok: 2 točki.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Na polkrožna loka vzporedna ravnini xy, ki omejujeta del ploskve na sliki 2, napnemo ploskev, ki bo kot del plašča cilindra, ki ga omejujeta krožnici in daljici, ki povezujeta koncne točke krožnic v smeri osi z. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ iz a. skozi to novo ploskev.

Rešitev: Možnih rešitev je več. Opazimo lahko, recimo, da je $\mathbf{F}$ *ves čas tangenten na ploskev in je zato integral enak 0.*

Ocenjevanje:

- *Po presoji: 15 točk.*