FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

3. kolokvij

18. april 2003

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

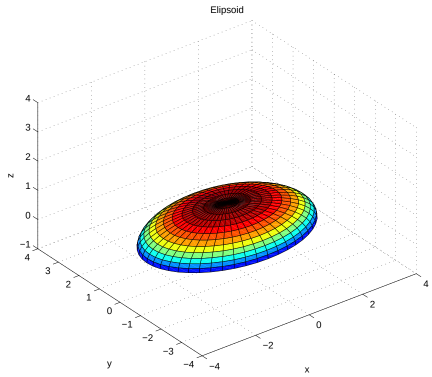
Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (25) Ploskev $\mathcal{S}$ na sliki 1 je dana parametrično s

$$\Phi(u,v) = (a\sin v\cos u, b\sin v\sin u, c\cos v)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $0 \le v \le \pi/2$.



Sl. 1 Ploskev $\mathcal{S}$.

a. (10) Zapišite tangentno ravnino na ploskev v točki $T(a/2, b/2, c\sqrt{2}/2)$.

Rešitev: Najprej moramo ugotoviti, katerima vrednostima parametrov u in v odgovarja točka T. Na osnovi zadnje komponente ugotovimo, da je $\cos v = \sqrt{2}/2$, torej $v = \pi/4$. Primerjamo še prve komponente in ugotovimo, da je $u = \pi/4$. Računamo

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} -a\sin v\sin u \\ b\sin v\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{in} \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} a\cos v\cos u \\ b\cos v\sin u \\ -c\sin v \end{pmatrix}.$$

Vstavimo $(u,v) = (\pi/4, \pi/4)$ in dobimo

$$\Phi_u(\pi/4,\pi/4) = \begin{pmatrix} -a/2 \\ b/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{in} \quad \Phi_v(\pi/4,\pi/4) = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \\ -c\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Normala na ploskev bo v smeri vektorskega produkta $\Phi_u \times \Phi_v$. Označimo $\mathbf{m} = \Phi_u \times \Phi_v = (-bc\sqrt{2}/4, -ac\sqrt{2}/4, -ab/2)$ in $\mathbf{r}_0 = (a/2, b/2, c\sqrt{2}/2)$. Enačba tangentne ravnine bo

$$\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Kaj sta u in v: 2 točki.*
- *Φ_u: 2 točki.*
- *Φ_v: 2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*
- *Enačba ravnine: 2 točki.*

b. (15) Privzemite, da je $a = b$. Naj bo dano vektorsko polje $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$. Za normalo izberite tisto s pozitivno z-komponento.

Rešitev: Izračunamo, da je

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} -ac\sin^2 v\cos u \\ -ac\sin^2 v\sin u \\ -a^2\sin v\cos v \end{pmatrix}.$$

Ker izbiramo normalo s pozitivno z-komponento, moramo spremeniti predznak.

$$\mathbf{F} \times (-\Phi_u \times \Phi_v) = a^2 c\sin v\,.$$

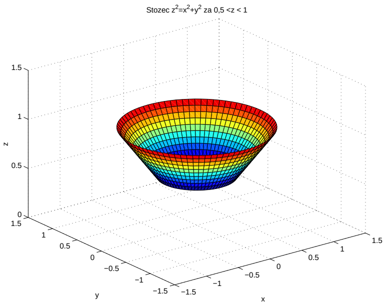
Sledi

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} a^2 c\sin v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= a^2 c\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin v\,\mathrm{d}v \\ &= 2\pi a^2 c\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Vektorski produkt: 3 točke.*
- *Predznak: 3 točke.*
- *Množenje $\mathbf{F}$ in $\Phi_u \times \Phi_v$: 3 točke.*
- *Fubini in integriranje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

2. (25) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo del plašča stožca med višinama $z = 1/2$ in $z = 1$ kot na sliki 2. Formalno je ploskev dana z $z^2 = x^2 + y^2$ za $1/2 \leq z \leq 1$.



Sl. 2 Ploskev $\mathcal{S}$.

a. (15) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F} = (z, 0, y)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi dano ploskev. Za normalo izberite vedno tisti vektor s pozitivno z-komponento.

Rešitev: Izračunamo $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$. *Če ploskev "zapremo" z manjkajočima krogoma, tako da dobimo "rezino" stožca, je pretok skozi to zaključeno ploskev, ne glede na izbiro normale, po Gaussovem izreku enak* 0. *Komponenta polja v smeri osi z je vedno* $F_3(x, y, z) = y$. *Zaradi simetrije je pretok skozi dodana kroga enak* 0, *torej je tudi pretok skozi začetno ploskev enak* 0.

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 3 točke.*
- *Zapiranje s krogoma: 3 točke.*
- *Pretok skozi površino nastalega telesa: 3 točke.*
- *Izračun pretoka skozi kroga: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

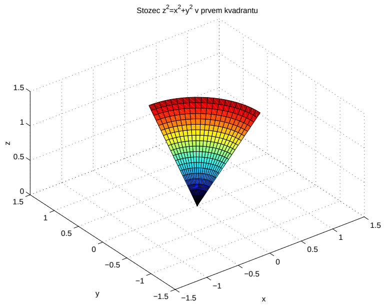
b. (10) Označite $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ in naj bo $\mathbf{F} = (z, 0, x)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F} \times \mathbf{k}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$, pri čemer si za normalo izberite vedno vektor s pozitivno z-komponento.

Rešitev: Nalogo lahko rešimo na več načinov. Najpreprostejši je morda naslednji: ploskev spet "zapremo" s krogoma. Vektorsko polje $\mathbf{F} \times \mathbf{k}$ *je na dodanih krogih pravokotno na* $\mathbf{k}$, *torej vzporedno s krogoma. Pretok polja* $\mathbf{F} \times \mathbf{k}$ *skozi dodana kroga je enak* 0. *S preprostim računanjem ugotovimo, da je* $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{k}) = 0$. *Z uporabo Gaussovega izreka sklepamo, kot v a., da je iskani pretok enak* 0.

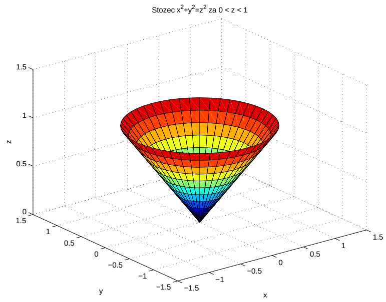
Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Zapiranje s krogoma: 2 točki.*
- *Pretok skozi površino nastalega telesa: 2 točki.*
- *Izračun pretoka skozi kroga: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F} = (z, 0, y)$.



Sl. 3a Ploskev $\mathcal{S}_1$.



Sl. 3b Ploskev $\mathcal{S}_2$.

a. (10) Ploskev $\mathcal{S}_1$ naj bo dana kot $x^2 + y^2 = z^2$ za $x \geq 0, y \geq 0$ in $0 \leq z \leq 1$ kot na sliki 3a. Za normalo si izberite vedno vektor, ki ima pozitivno z-komponento. Izračunajte

$$\int_{\partial \mathcal{S}_1} \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{r} \, .$$

Rešitev: Izračunamo

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (1, 1, 0) \, .$$

Ploskev je dana kot graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *na* $G = \{(x, y) \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Za normalo si izberimo vektor v smeri* $(-f_x, -f_y, 1)$. *Po Stokesovem izreku je*

$$\int_{\partial \mathcal{S}_1} \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \, \mathrm{d}\mathbf{S} \, .$$

Računamo z uvedbo polarnih koordinat

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \, \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_G (-f_x - f_y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= -\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^1 (\cos\phi + \sin\phi) \, r \, \mathrm{d}r \\ &= -1 \, . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Rotor: 3 točke.*
- *Ideja s Stokesom: 3 točke.*
- *Zapis ploskovnega integrala: 3 točke.*
- *Polarne koordinate: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (15) Naj bo $\mathcal{S}_2$ ploskev dana kot plašč stožca $x^2 + y^2 = z^2$ za $0 \leq z \leq 1$ kot na sliki 3b. Za normalo na ploskev izberite vedno tisto s pozitivno z-komponento. Označite $\mathbf{G} = (y, -x, 0)$. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \, \mathrm{d}\mathbf{S} \, .$$

Namig: Preberite Stokesov izrek v smeri od krivuljnih proti ploskovnim integralom. Kakšno je polje $\mathbf{G}$ *na robu ploskve* $\mathcal{S}_2$*?*

Rešitev: Naloga ima več možnih rešitev. Opazimo, da je vektorsko polje $\mathbf{G}$ *tangentno na* $\partial\mathcal{S}_2$*, torej je* $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ *pravokotno na* $\partial\mathcal{S}_2$ *v vsaki točki. Krivuljni integral po* $\partial\mathcal{S}_2$ *je zato enak* 0*. Po Stokesovem izreku je*

$$\int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{rot}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial\mathcal{S}_2} (\mathbf{F}\times\mathbf{G})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$$

Iskan pretok je enak 0*.*

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da* $\mathbf{G}$ *tangentno na* $\partial\mathcal{S}_2$*: 2 točki.*
- *Sklep, da je* $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ *pravokotno na pot: 2 točki.*
- *Ideja s Stokesovim izrekom: 2 točki.*
- *Branje Stokesovega izreka od krivulj do ploskovnih integralov: 2 točki.*
- *Končni sklep: 2 točki.*

4. (25) Stacionarni tok nestisljivega viskoznega fluida med dvema vzporednima okroglima cevema s premeroma $R_1 < R_2$ z osjo simetrije v smeri osi x naj bo opisan s poljem $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, pri čemer je zaradi simetrije komponenta v odvisna le od razdalje $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ od skupne osi obeh cevi, torej $v(x, y, z) = v(r)$. Polje $\mathbf{v}$ mora ustrezati Navier-Stokesovim enačbam

$$\rho \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \, \Delta \mathbf{v}$$

z robnimi pogoji $v(R_1) = v(R_2) = 0$ (na stenah je hitrost enaka 0).

a. (15) Izračunajte $\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Pokažite, da je $\Delta \mathbf{v} = (v''(r) + \frac{1}{r} v'(r), 0, 0)$. Izpeljite, da je v primeru, ko je tlak odvisen le od x, torej $p(x, y, z) = p(x)$, zadoščeno Navier-Stokesovim enačbam, če velja

$$0 = -p'(x) + \mu(v''(r) + \frac{1}{r} v'(r)) \, .$$

Rešitev: Matrika $\nabla \mathbf{v}$ ima od nič različne elemente le v prvi vrstici. Označimo odvod funkcije $v(r)$ po spremenljivki $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ z $v'(r)$. S parcialnim odvajanjem dobimo

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & v'(r) \frac{y}{r} & v'(r) \frac{z}{r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sledi $\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. S ponovnim parcialnim odvajanjem dobimo, da je

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y, z) = v''(r) \frac{y^2}{r^2} + v'(r) \frac{z^2}{r^3} .$$

Na povsem podoben način izračunamo še drugi parcialni odvod v po z. Seštejemo in dobimo

$$\Delta v(x, y, z) = v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) \, .$$

Sledi

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Opazimo, da je $\nabla p(x, y, z) = (p'(x), 0, 0)$. Enačbo, ki ji mora ustrezati funkcija v, dobimo z vstavljanjem v Navier-Stokesove enačbe in primerjanjem prvih komponent.

Ocenjevanje:

- *Definicija $\nabla \mathbf{v}$: 3 točke.*
- *Parcialno odvajanje in množenje: 3 točke.*
- *Drugi parcialni odvod v: 3 točke.*
- *Seštevanje in Laplace: 3 točke.*
- *Vstavljanje v enačbe: 3 točke.*

b. (10) Iz Navier-Stokesovih enačb sledi, da za tlak velja $\nabla p(x,y,z) = (p_0, 0, 0)$ za neko konstanto p_0. Pokažite, da polje $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ z

$$v(r) = \frac{p_0}{4\mu}\left(r^2 - R_2^2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\log(R_2/R_1)}\log(r/R_2)\right)$$

ustreza Navier-Stokesovim enačbam, vključno z robnimi pogoji.

Rešitev: Preverimo najprej robne pogoje. Z vstavljenjem $r = R_2$ takoj sledi $v(R_2) = 0$. Vstavimo $r = R_1$. Dobimo

$$\begin{aligned} v(R_1) &= \frac{p_0}{\mu}\left(R_1^2 - R_2^2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\log(R_2/R_1)}\log(R_1/R_2)\right) \\ &= \frac{p_0}{\mu}\left(R_1^2 - R_2^2 - (R_1^2 - R_2^2)\right) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

V delu a. naloge smo ugotovili, da bo zadoščeno Navier-Stokesovim enačbam, če bo

$$0 = -p_0 + \mu(v''(r) + \frac{1}{r}v'(r))\,.$$

Odvajamo in dobimo

$$v'(r) = \frac{2p_0}{4\mu}(r + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\log(R_2/R_1)}\frac{1}{r})$$

in

$$v''(r) = \frac{2p_0}{4\mu}(1 - \frac{R_1^2 - R_2^2}{\log(R_2/R_1)}\frac{1}{r^2})\,.$$

Seštejemo in dobimo

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = \frac{p_0}{\mu}\,.$$

Sledi

$$0 = -p_0 + \mu\Delta v\,.$$

Ocenjevanje:

- *Robni pogoj za R_2: 2 točki.*
- *Robni pogoj za R_1: 2 točki.*
- *Izračun v': 2 točki.*
- *Izračun v'': 2 točki.*
- *Vstavljanje in preverjanje: 2 točki.*