FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

3. kolokvij

1. april 2005

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

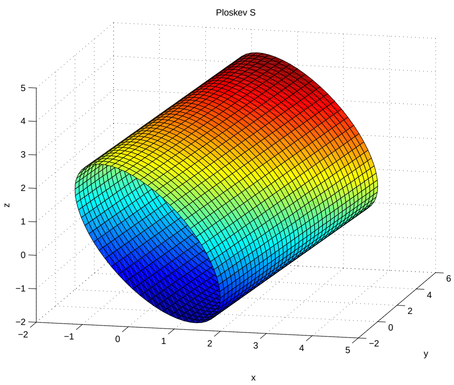
Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično s

$$\Phi(u,v) = (-\cos u + \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}\,v, -\cos u - \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}\,v, 2\cos u + \sqrt{2}v)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $0 \le v \le a$. Ploskev je na sliki 1.



Slika 1 Ploskev $\mathcal{S}$ dana v nalogi.

a. (10) Poiščite enotski vektor, normalen na ploskev v točki $(\sqrt{3}+a, -\sqrt{3}+a, a)$.

Rešitev: Najprej preverimo, da je točka na ploskvi. Ugotovimo, da je

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{3}+a, -\sqrt{3}+a, a)\,,$$

torej je točka na ploskvi. Po formuli je normalen vektor na ploskev v dani točki enak

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|}\,.$$

Računamo

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} \sin u + \sqrt{3}\cos u \\ \sin u - \sqrt{3}\cos u \\ -2\sin u \end{pmatrix} \qquad \textit{in} \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\,.$$

Z vektorskim množenjem dobimo

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}\sin u - \sqrt{6}\cos u \\ -3\sqrt{2}\sin u - \sqrt{6}\cos u \\ 2\sqrt{6}\cos u \\ . \end{pmatrix}$$

Sledi

$$\begin{aligned} |\Phi_u \times \Phi_v|^2 &= 18\sin^2 u - 6\sqrt{2}\sqrt{6}\sin u\cos u + 6\cos^2 u + \\ &\qquad +18\sin^2 u + 2\sqrt{2}\sqrt{6}\sin u\cos u + 6\cos^2 u + \\ &\qquad +24\cos^2 u \\ &= 36(\sin^2 u + \cos^2 u) \\ &= 36\,. \end{aligned}$$

Dobimo

$$\mathbf{n} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

Ocenjevanje:

- *Vrednosti parametrov: 2 točki.*
- Φ_u *: 2 točki.*
- Φ_v *: 2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*
- *Norma in rezultat: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$. Za normalo si izberite vektor $(\Phi_u \times \Phi_v)/|\Phi_u \times \Phi_v|$.

Namig: Ko boste računali notranji integral v

$$\int_0^a \mathrm{d}v \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) \,\mathrm{d}u\,,$$

upoštevajte, da se členi oblike $\cos u$, $\sin u$ *ali* $\cos u \sin u$ *integrirajo v* 0.

Rešitev: Po formuli za pretok je

$$\int_{[0,2\pi]\times[0,a]} \mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Integral najprej pretvorimo v dvakratni integral

$$\int_0^a \mathrm{d}v \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) \,\mathrm{d}u\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) &= \\
&= (-\cos u + \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}v)(3\sqrt{2}\sin u - \sqrt{6}\cos u) + \\
&\quad + (-\cos u - \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}v)(-3\sqrt{2}\sin u - \sqrt{6}\cos u) + \\
&\quad + (2\cos u + \sqrt{2}v)(2\sqrt{6}\cos u)\,.
\end{aligned}$$

Ko vstavimo ta produkt v integral opazimo, da se vsi produkti $\cos u \sin u$ *ali* $\sin u$ *oziroma* $\cos u$ *integrirajo v* 0. *Notranji integral bo tako enak*

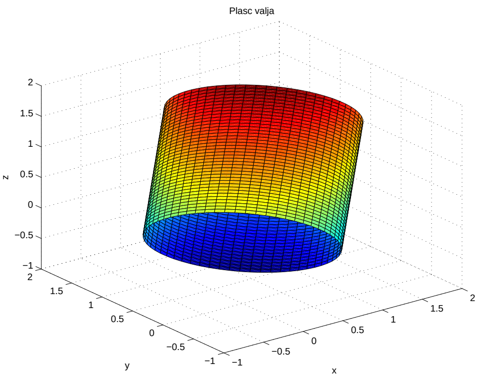
$$\int_0^{2\pi} (6\sqrt{6}\sin^2 u + 6\sqrt{6}\cos^2 u) \,\mathrm{d}u = 12\sqrt{6}\,\pi\,.$$

Ker je ta integral neodvisen od v, *je celotni pretok enak* $12\sqrt{6}\,a\,\pi$.

Ocenjevanje:

- *Formula: 3 točke.*
- *Vstavljanje komponent* $\mathbf{F}$*: 3 točke.*
- *Skalarni produkt: 3 točke.*
- *Integrali produktov in končni notranji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

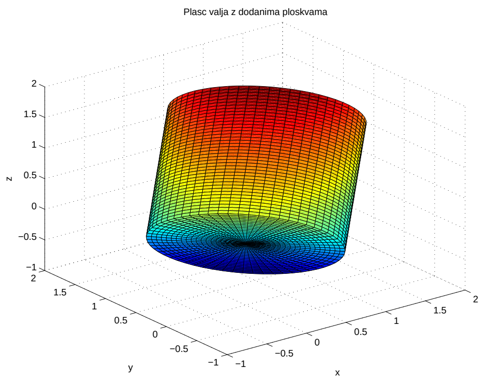
2. (25) Naj bo V valj z osjo $\mathbf{e} = (1,1,1)/\sqrt{3}$, polmerom $R = 1$ in višino h. Središči osnovnih ploskev naj bosta v točkah $(0,0,0)$ in $(h,h,h)/\sqrt{3}$. Valj je na sliki 2.



Slika 2 Plašč valja.

a. (10) Naj bo $\mathcal{S}$ plašč valja brez osnovnih ploskev. Z uporabo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F} = (y - z, -x + z, x - y)$ skozi ploskev $\mathcal{S}$. Za normalo izberite vektor, ki "kaže" iz valja.

Rešitev: Ugotovimo, da je $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 0$. *Na osnovnih ploskvah valja je normala ali* $\mathbf{e}$ *ali* $-\mathbf{e}$. *Ker je* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e} = 0$, *je pretok polja* $\mathbf{F}$ *skozi osnovni ploskvi enak* 0, *tako da z dodajanjem teh ploskev pretoka ne spremenimo. Po Gaussovem izreku je pretok polja skozi celotno površino valja enak* 0, *torej je tudi pretok skozi plašč enak* 0.



Slika 2a Plašč valja z dodanima ploskvama.

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Opažanje, da je polje vzporedno osnovnim ploskvam: 2 točki.*
- *Ideja z Gaussom: 2 točki.*
- *Pretok skozi celotno površino: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

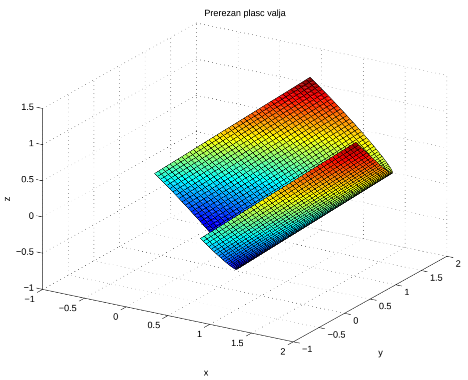
b. (15) Naj bo $\mathbf{F} = \mathbf{f}$, kjer je $\mathbf{f}$ konstanten vektor. Izračunajte pretok tega polja skozi plašč valja.

Rešitev: Spet je $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$. *Normala na eno od osnovnih ploskev je* $\mathbf{e}$, *normala na drugo pa* $-\mathbf{e}$. *Ker imata osnovni ploskvi enako ploščino, je pretok skozi ti dve ploskvi nasprotnega predznaka. Z dodajanjem teh dveh ploskev dodamo k pretoku* 0, *tako da je po Gaussovem izreku končni rezultat spet enak* 0.

Ocenjevanje:

- *Ideja z dodajanjem: 3 točke.*
- *Nasprotni predznaki: 3 točke.*
- *Utemeljitev, da z dodajanjem pretoka ne spremenimo: 3 točke.*
- *Gaussov izrek: 3 točke.*
- *Končni rezultat: 3 točke.*

3. (25) Naj bo V valj z osjo $\mathbf{e} = (1,1,1)/\sqrt{3}$, polmerom $R = 1$ in višino h. Središči osnovnih ploskev naj bosta v točkah $(0,0,0)$ in $(h,h,h)/\sqrt{3}$. Plašč valja prerežemo z ravnino, ki gre skozi izhodišče in ima za normalo vektor $(-1,-1,2)$. Ploskev, ki nastane kot polovico plašča nad ravnino, označimo s $\mathcal{S}$. Ploskev je na sliki3.

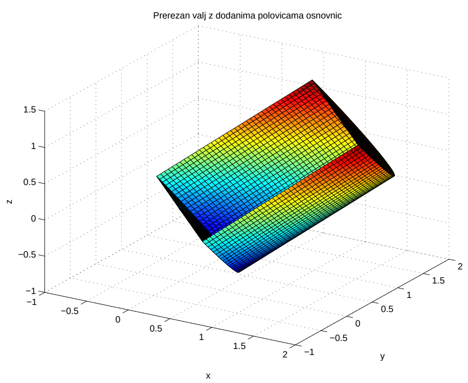


Slika 3 Plašč valja.

a. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (2y - z, -2x, x)$. Pokažite, da je pretok $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ skozi ploskev $\mathcal{S}$ enak pretoku skozi pravokotnik, ki je nastal, ko smo valj prerezali. Za normalo na $\mathcal{S}$ izberemo vektor, ki kaže iz valja, za normalo na pravokotnik pa vektor $(1,1,-2)$.

Namig: Dodajte kakšno ploskev.

Rešitev: Izračunamo, da je $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (0,-2,-4)$. *Pretok skozi plovoci osnovni ploskev tega polja je* 0, *ker integriramo konstantno polje, normali pa sta nasprotnega predznaka. Z dodajanjem teh ploskev se pretok torej ne spremeni. Ker je divergenca konstantnega polja enaka* 0, *je pretok skozi celotno površino polovice valja enak* 0. *Pretoka skozi ploskev* $\mathcal{S}$ *in pravokotnik sta nasprotnega predznaka, če izberemo normalo, ki vedno kaže iz telesa. Ker smo na pravokotniku izbrali normalo v drugo smer, sta pretoka enaka.*



Slika 3a Plašč valja z dodanima ploskvama.

Ocenjevanje:

- *Rotor: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Dodajanje osnovnih ploskev: 2 točki.*
- *Dodajanje pravokotnika: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Rešitev: Po Stokesovem izreku je

$$\int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

V a. delu smo pokazali, da je ta pretok enak pretoku skozi pravokotnik, če za normalo izberemo vektor $(-1, -1, 2)$. *Ker sta stranici pravokotnika enaki* 2, *je pretok enak* $-8/\sqrt{6}$.

Ocenjevanje:

- *Stokesov izrek: 3 točke.*
- *Ideja iz a.: 3 točke.*
- *Pretok konstantnega polja skozi pravokotnik: 3 točke.*
- *Dimenzije pravokotnika: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Vektorsko polje $\mathbf{u}$ naj opisuje stacionarni tok idealnega fluida, za katerega veljajo Eulerjeve enačbe

$$\rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \, .$$

Predpostavljajte, da je tok izentropen, kar pomeni, da obstaja taka funkcija w (entropija), da je

$$\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla p \, .$$

a. (15) Izpeljite najprej, da vedno velja

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \, .$$

Pojasnilo: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

Rešitev: Zapišimo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. *S temi oznakami je*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \, .$$

Izračunajmo komponente gradienta in dobimo

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x} u_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial y} u_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z} u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial z} u_3 \end{pmatrix} .$$

Izračunajmo še

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{rot}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Zdaj preverimo enakost obeh izrazov.

Ocenjevanje:

- *Interpretacija leve strani: 3 točke.*
- *Izračun gradianta: 3 točke.*
- *Gradient na desni strani: 3 točke.*
- *Vektorsko množenje: 3 točke.*
- *Preverjanje enakosti: 3 točke.*

b. (10) Predpostavite, da ni zunanjih sil, torej $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Naj bo $\mathbf{x}(t)$ pot dana parametrično za $t_1 \leq t \leq t_2$ in naj velja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Pokažite, da je

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) + w(\mathbf{x}(t))$$

konstantna funkcija na $[t_1, t_2]$.

Namig: Odvajajte ϕ *in uporabite a.*

Rešitev: Po pravilih za odvajanje posrednih funkcij je

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u}))\dot{\mathbf{x}}+\nabla w\cdot\dot{\mathbf{x}} \\
&= (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u}))\mathbf{u}+\nabla w\cdot\mathbf{u} \\
&= (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}+(\frac{1}{\rho}\nabla p)\cdot\mathbf{u} \\
&= (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\frac{1}{\rho}\nabla p)\cdot\mathbf{u} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Odvod funkcije ϕ je 0, torej je funkcija konstantna.

Ocenjevanje:

- *Pravilno postedno odvajanje prvega člena: 2 točki.*
- *Pravilno posredno odvajanje drugega člena: 2 točki.*
- *Opažanje, da je $\mathbf{u}$ ortogonalen na $\mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u})$: 2 točki.*
- *Uporaba Eulerjevih enačb: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*