FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

3. kolokvij

16. maj, 1997

Ime in priimek: ____________________________ **Letnik:** __________

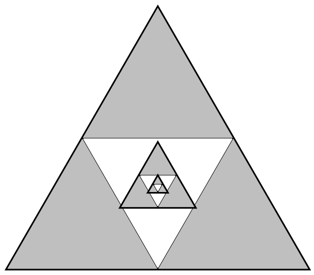
Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

REŠITVE

1. Množico v ravnini definiramo rekurzivno kot na spodnji sliki. Na vsakem koraku včrtamo trikotnik, ki ima za oglišča razpolovišča stranic trikotnika na prejšnjem koraku.



a. (10) Izračunajte ploščino osenčenega lika.

Rešitev: Označimo stranico trikotnika z a. Ploščina prvih štirih osenčenih trikotnikov je $3\sqrt{3}a^2/16$. Vsak naslednji včrtani trikotnik ima štirikrat krajšo stranico kot prejsnji, torej moramo ploščine deliti s 16. Sešteti je potrebno vrsto

$$\begin{aligned} & (3\sqrt{3}a^2/16) \cdot (1 + 1/16 + (1/16)^2 + (1/16)^3 + \cdots) \\ = & (3\sqrt{3}a^2/16) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1/16)^n \\ = & (3\sqrt{3}a^2/16) \cdot \frac{1}{1-(1/16)} = \sqrt{3}a^2/5\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte skupno doložino roba vseh osenčenih trikotnikov.

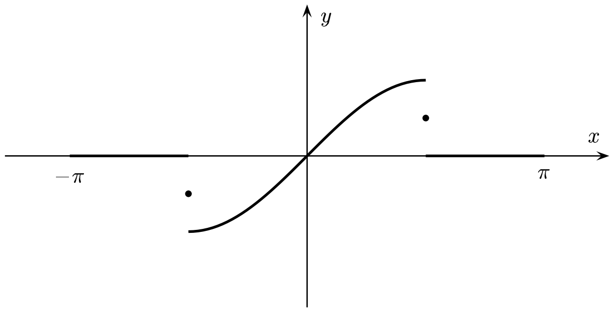
Rešitev: Dolžina roba prvih treh osenčenih trikotnikov je $9a/2$. Rob vsakega naslednjega včrtanega trikotnika je manjši za faktor 4. Seštevamo vrsto

$$(9a/2) \cdot (1 + 1/4 + 1/16 + \cdots) = (9a/2) \sum_{n=0}^{\infty} (1/4)^n = (9a/2) \cdot \frac{1}{1-(1/4)} = 6a\,.$$

2. (20) Funkcija $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ naj bo definirana z

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{za } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{za } x = \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2} & \text{za } x = -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Graf te funkcije je na spodnji sliki.



a. (10) Pokažite, da je

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n\cos(n\pi/2)}{n^2-1}\ \sin(nx)\,.$$

Utemeljite, zakaj velja zgornji enačaj za vse $x \in [-\pi, \pi]$.

Rešitev: Funkcija $f(x)$ je liha, zato je $a_n = 0$ za $n = 0, 1, \ldots$. Za $n = 1$ dobimo

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos(2x))\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

Za $n > 1$ računamo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \sin nx\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} [\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x)]\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin((n-1)x)}{n-1} + \frac{\sin((n+1)x)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

Pri vstavljanju upoštevamo

$$\begin{aligned} \sin((n-1)\pi/2) &= \cos(n\pi/2) \qquad \text{in} \\ \sin((n+1)\pi/2) &= -\cos(n\pi/2) \end{aligned}$$

Ko izpostavimo, dobimo

$$b_n = \frac{1}{\pi}(-\cos(n\pi/2)\cdot(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1})) = -\frac{\cos(n\pi/2)}{\pi}\cdot\frac{2n}{n^2-1}\,.$$

Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki proti funkciji $f(x)$, ker je f odsekoma zvezna in odskoma zvezno odvedljiva in velja za vse $x \in [-\pi,\pi]$ $(f(x+)+f(x-))/2 = f(x)$.

b. (10) Uporabite zgornjo Fourierovo vrsto za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2(4k+2)}{(4k+2)^2-1} = \frac{2\cdot 2}{2^2-1} - \frac{2\cdot 6}{6^2-1} + \frac{2\cdot 10}{10^2-1} - \cdots\,.$$

Rešitev: V Fourierovo vrsto zgoraj vstavimo $x=\pi/4$. Na levi dobimo $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. *Na desni dobimo*

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n\cos(n\pi/2)}{n^2-1}\,\sin(n\pi/4) \\ = &\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{\pi}(-\frac{2\cdot 2}{2^2-1} + \frac{2\cdot 6}{6^2-1} - \frac{2\cdot 10}{10^2-1} + \cdots) \end{aligned}$$

Torej je vsota vrste enaka $\sqrt{2}\pi/4$.

3. (20) Dana je diferencialna enačba

$$y = xy' - \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

a. (10) Naj bo $u(x) = y(x)/x$. Izpeljite diferencialno enačbo, ki ji ustreza funkcija u.

Rešitev: V zgornji diferencialni enačbi izrazimo najprej y' kot

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\,.$$

Enačba je homogena z $f(u) = u + \sqrt{1+u^2}$ in moramo rešiti enačbo

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{x}\,.$$

Drugače zapisano dobimo

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x}\,.$$

b. (10) Poiščite rešitev zgornje enačbe na intervalu $[1, \infty)$, ki ustreza začetnemu pogoju $y(1) = 0$.

Namig: $\operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

Rešitev: Iz a. sledi, da je splošna rešitev za u oblike $\operatorname{arcsinh}(u) = \log(x) + c$ *za poljubno konstanto c. Ker je $y(1) = 0$ mora biti $u(1) = 0$ in tako $c = 0$. Iz namiga še ugotovimo, da je*

$$u = \sinh(\log(x)) = \frac{e^{\log x} - e^{-\log x}}{2} = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})\,.$$

Ker je $y = xu$, je

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

iskana rešitev.

4. (20) Linearna diferencialna enačba drugega reda je dana z

$$y'' - 2y' + y = g(x)\,.$$

a. (10) Poiščite linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom je $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ *z dvojno ničlo* $\lambda = 1$. *Linearno neodvisni rešitvi sta* e^x *in* xe^x.

b. (10) Naj bo $g(x) = x$. Poiščite rešitev y nehomogene enačbe, ki ustreza pogojem $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Desna stran je oblike $e^{\nu x}R(x)$, *kjer je* $R(x)$ *polinom prve stopnje in* $\nu = 0$. *Po pravilu bomo partikularno rešitev našli z nastavkom* $ax + b$. *Vstavimo v enačbo in dobimo*

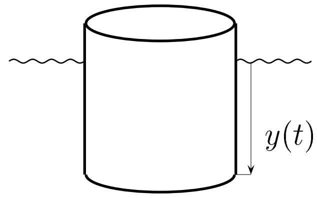
$$-2a + (ax + b) = x\,.$$

Sledi $a = 1$ *in* $b = 2$. *Splošna rešitev nehomogene enačbe je oblike* $y(x) = (x+2) + c_1e^x + c_2xe^x$. *Konstanti* c_1 *in* c_2 *moramo določiti tako, da bo zadoščeno začetnim pogojem:*

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 + c_1 = 0 \\ y'(0) &= 1 + c_1 + c_2 = 0 \end{aligned}$$

Sledi $c_1 = -2$ *in* $c_2 = 1$.

5. (20) Sod v obliki valja s specifično težo manjšo od vode plava v vodi kot na spodnji sliki.



Po Arhimedovem zakonu o vzgonu na sod deluje sila vzgona, ki je enaka teži izpodrinjene vode. Druga sila je seveda gravitacija. Po Newtonovem zakonu za globino $y(t)$ velja

$$m\ddot{y} = mg - A\rho y\,,$$

dokler je $0 \leq y(t) \leq h$, kjer je h višina valja, A osnovna ploskev in ρ specifična gostota vode.

a. (10) Najdite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Gre za nehomogeno linearno diferencialno enačbo drugega reda. Delimo enačbo z m in označimo $\omega^2 = A\rho/m$. Linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe sta $\cos(\omega t)$ in $\sin(\omega t)$. Partikularno rešitev brž uganemo, ker bo kar konstanta $mg/(A\rho)$. Splošna rešitev bo oblike

$$mg/(A\rho) + c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\,.$$

b. (10) Predpostavite, da je $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ in $mg/A\rho > h/2$. Se bo sod popolnoma potopil?

Namig: Kaj mora biti $y(t)$, če bo sod pod gladino?

Rešitev: Najprej poiščimo rešitev, ki zadošča danima začetnima pogojema:

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{mg}{A\rho} + c_1 = 0 \\ y'(0) &= \omega c_2 = 0\,, \end{aligned}$$

iz česar sledi $c_2 = 0$ *in* $c_1 = -mg/(A\rho)$. *Rešitev je*

$$y(t) = \frac{mg}{A\rho}(1 - \cos(\omega t))\,.$$

Sod se bo potopil, če bo za nek t *globina* $y(t) > h$. *Izraz v oklepaju je največ* 2, *torej je maksimum funkcije* $y(t)$ *enak* $2mg/(A\rho)$, *kar je večje od* h, *če je izpolnjen pogoj v nalogi. Sod se bo potopil.*