FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

3. kolokvij

16. maj, 1997

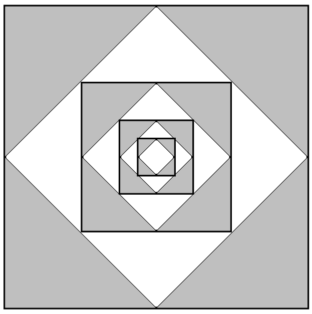
Ime in priimek: ____________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Množico v ravnini definiramo rekurzivno kot na spodnji sliki. Na vsakem koraku včrtamo kvadrat z dvakrat manjšo stranico in istim središčem in v množico vključimo osenčene trikotnike.



a. (10) Izračunajte ploščino osenčenega lika, tako da seštejete neskončno vrsto.

Rešitev: Ploščina prvih 4 osenčenih trikotnikov je 1/2. Ko včrtamo naslednji kvadrat, imajo osenčeni trikotniki dvakrat manjše stranice, torej štirikrat manjšo ploščino. Vsakič, ko včrtamo manjši kvadrat se ploščina zmanjša za faktor 4. Sešteti torej moramo neskončno vrsto

$$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/16 = 1/2 \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n \,.$$

Gre za neskončno geometrijsko vrsto s $q = 1/4$ *in vsoto* $1/(1-q)$. *Rezultat je* $(1/2) \cdot (4/3) = 2/3$.

b. (10) Izračunajte skupno doložino roba vseh osenčenih trikotnikov.

Rešitev: Vsak naslednji včrtani osenčeni lik ima dvakrat manjšo dolžino roba. Dolžina roba prvega osenčenega lika je $4 + 2\sqrt{2}$. *Sešteti moramo*

$$(4 + 2\sqrt{2}) \cdot (1 + (1/2) + (1/4) + \cdots) = (4 + 2\sqrt{2}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \,.$$

Spet gre za geometrijsko vrsto s $q = 1/2$ *in vsoto* 2. *Rezultat je* $8 + 4\sqrt{2}$.

2. (20) Funkcija $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ naj bo definirana z

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{za } 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{za } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{za } x = 0, \pi, -\pi. \end{cases}$$

a. (10) Dokažite, da je za $0 < x < \pi$

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}.$$

Utemeljite, zakaj Fourierova vrsta za $0 < x < \pi$ konvergira proti $\cos x$.

Rešitev: Funkcija le liha, zato je $a_n = 0$ za vse $n \geq 0$. Izračunajmo najprej

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin x \, \mathrm{d}x = 0,$$

kot se brž prepričamo s substitucijo $2x = u$. Za $n > 0$ zapišemo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-(-1)^{n+1} + 1}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Brž se prepričamo, da za lihe n dobimo $b_n = 0$, za sode pa $b_n = (1/\pi)4n/(n^2 - 1)$. Če sode n zapišemo kot $2k$ in seštevamo po k dobimo točno zgornji rezultat. Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki, ker je $f(x)$ odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva in velja povsod $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$.

b. (10) Uporabite a. za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{4(2n+1)^2 - 1}.$$

Rešitev: V zgornjo vrsto vstavimo $x = \pi/4$. *Ostanejo samo lihi členi, ker je* $\sin(k\pi) = 0$ *za vsak* k. *V Fourierovi vrsti za* $f(x)$ *na levi dobimo* $f(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, *na desni pa iskano vrsto pomnoženo z* $8/\pi$. *Rezultat je* $\pi\sqrt{2}/16$.

3. (20) Dana je diferencialna enačba prvega reda

$$y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0\,. \tag{1}$$

a. (10) Dokažite, da funkcija $z(x) = 1/y^3(x)$ zadošča nehomogeni linearni diferencialni enačbi

$$z' - \frac{3}{1+x}z = 3(1+x)\,.$$

Rešitev: Enačba je Bernoullijeva. Z odvajanjem dobimo $z' = -3y'/y^4$ ali $y' = -z'y^4/3$. Če vstavimo ta izraz za y' v enačbo dobimo

$$-\frac{z'y^4}{3} + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0\,.$$

Delimo še z y^4 in množimo z -3. Dobimo

$$z' - \frac{3z}{1+x} = 3(1+x)\,.$$

b. (10) Poiščite rešitev enačbe 1, za katero je $y(0) = -1$.

Rešitev: Enačba v a. je nehomogena linearna prvega reda. Rešitev homogene je $z = c(1+x)^3$, rešitev nehomogene pa iščemo z običajnim nastavkom $z = (1+x)^3 v$ (za c si lahko izberemo 1). Vstavimo v enačbo in dobimo

$$3(1+x)^2 v + (1+x)^3 v' - \frac{3(1+x)^3 v}{1+x} = 3(1+x)\,.$$

Prvi in tretji člen na levi se uničita in dobimo $(1+x)^3 v' = 3(1+x)$ in z integriranjem $v(x) = -3/(1+x)$. Splošna rešitev nehomogene enačbe je

$$z(x) = -3(1+x)^2 + c(1+x)^3\,.$$

Ker je $y(0) = 1$ natanko takrat, ko je $z(0) = -1$, določimo konstanto iz tega pogoja, torej $z(0) = -3 + c = -1$, ali $c = 2$. Iskana rešitev je

$$z(x) = -3(1+x)^2 + 2(1+x)^3\,.$$

Rešitev za y dobimo kot $y = z^{-1/3}$.

4. (20) V teoriji trdnosti nastopa diferencialna enačba

$$y^{(4)} + 4\lambda y = 0, \lambda > 0\,. \tag{2}$$

a. (10) Dokažite, da so $e^{\nu x}\cos(\nu x)$, $e^{\nu x}\sin(\nu x)$, $e^{-\nu x}\cos(\nu x)$ in $e^{-\nu x}\sin(\nu x)$ linearno neodvisne rešitve zgornje diferencialne enačbe, pri čemer je $\nu = \lambda^{1/4}$.

Rešitev: Nalogo smo rešili na predavanjih. V resnici je potrebno samo ugotoviti, da so koreni karakterističnega polinoma $P(z) = z^4 + 4\lambda$ enaki $\nu(1+i)$, $\nu(1-i)$, $\nu(-1+i)$ in $\nu(-1-i)$. Rešitve dobimo po navodilu za LDE s konstantnimi koeficienti.

b. (10) Naj bodo dani začetni pogoji $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ in $y'''(0)$. Dokažite, da je rešitev enačbe (2) enaka

$$y(0)\ \cosh(\nu x)\cos(\nu x) + \frac{y'(0)}{2\nu}\,(\cosh(\nu x)\sin(\nu x) + \sinh(\nu x)\cos(\nu x)) +$$
$$\frac{y''(0)}{2\nu^2}\,\sinh(\nu x)\sin(\nu x) + \frac{y'''(0)}{4\nu^3}\,(\cosh(\nu x)\sin(\nu x) - \sinh(\nu x)\cos(\nu x))$$

Rešitev: Označimo zgornje rešitve z

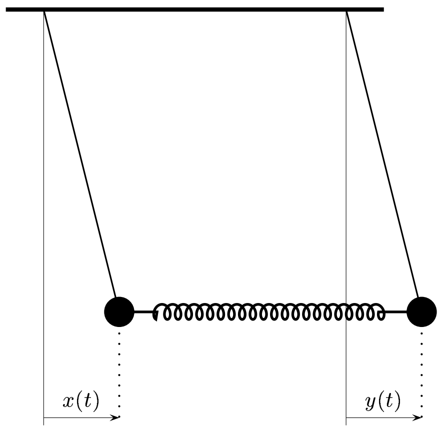
$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \cosh(\nu x)\cos(\nu x)\\
y_2(x) &= \frac{2}{\nu}\,(\cosh(\nu x)\sin(\nu x) + \sinh(\nu x)\cos(\nu x))\\
y_3(x) &= \frac{2}{\nu^2}\,\sinh(\nu x)\sin(\nu x)\\
y_4(x) &= \frac{4}{\nu^3}\,(\cosh(\nu x)\sin(\nu x) - \sinh(\nu x)\cos(\nu x))
\end{aligned}$$

Rešitve so izbrane tako, da je $y_i^{(j)}(0) = \delta_{ij}$, kjer je $\delta_{ii} = 1$ in $\delta_{ij} = 0$, če je $i \neq j$. Splošno rešitev enačbe iščemo kot linearno kombinacijo zgornjih funkcij $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4$. Če vstavimo v enačbo $x = 0$, dobimo $c_1 = y(0)$. Če odvajamo in upoštevamo $y_1'(0) = y_3'(0) = y_4'(0) = 0$ in $y_2'(0) = 1$, dobimo $c_2 = y'(0)$. Popolnoma podobno ravnamo še za druge in tretje odvode.

5. (20) Za speti nihali enake mase m in dolžine l na spodnji sliki velja sistem diferencialnih enačb [1]

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= -\alpha\,x - k(x-y) \\ m\,\ddot{y} &= -\alpha\,y - k(y-x)\,, \end{aligned}$$

pri čemer je $\alpha = mg/l$ (g je gravitacijska konstanta, k je konstanta vzmeti).



a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe. *Namig: Ena možnost je ta, da enačbi najprej seštejete in potem odštejete.*

Rešitev: Če enačbi seštejemo, dobimo

$$m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -\alpha(x+y)\,.$$

To je LDE drugega reda za vsoto $x+y$ z rešitvijo

$$x+y = c_1\cos(\omega_1 t) + c_2\sin(\omega_1 t)\,,$$

[1] Sistemi diferencialnih enačb ne pridejo v poštev na kolokviju.

kjer je $\omega_1 = \sqrt{\alpha/m}$*. Podobno z odštevanjem dobimo*

$$m(x-y) = (\alpha + 2k)(x-y)\,,$$

kar je spet LDE s splošno rešitvijo

$$x - y = c_3 \cos(\omega_2 t) + c_4 \sin(\omega_2 t)\,,$$

kjer je $\omega_2 = \sqrt{(\alpha+2k)/m}$*. Rešitvi za* x *in* y *dobimo tako, da funkciji izračunamo iz* $x+y$ *in* $x-y$*.*

b. (10) Katere rešitve ustrezajo lastnim nihanjem sistema? Lastna nihanja so oblike

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{c}e^{i\omega t}$$

za nek vektor $\mathbf{c}$ in lastno frekvenco ω.

Rešitev: Nastavek dvakrat odvajamo po t*. Dobimo*

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{c}e^{i\omega t}$$

Torej mora biti

$$-m\omega^2 \mathbf{c}e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} -\alpha - k & k \\ k & -\alpha - k \end{pmatrix} \mathbf{c}e^{i\omega t}\,.$$

Pokrajšamo $e^{i\omega t}$ *in ugotovimo, da mora biti* $\mathbf{c}$ *lastni vektor matrike na desni,* $-m\omega^2$ *pa lastna vrednost. Lastni vrednosti sta* $-a$ *in* $-a-2k$ *s pripadajočina lastnima vektorjema* $\mathbf{c}_1 = (1,1)$ *in* $\mathbf{c}_2 = (-1,1)$*. Lastna nihanja so torej oblike*

$$\mathbf{c_1} e^{i\omega_1 t} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{c_2} e^{i\omega_2 t}\,.$$