FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

4. kolokvij

13. maj 1999

Ime in priimek: ______________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y'' - 2y' + 5y = 4e^x \sin 2x\,.$$

a. (15) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Najprej poiščemo linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe. Karakteristični polinom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

z ničlama $\lambda_1 = 1 + 2i$ *in* $\lambda_2 = 1 - 2i$. *Linearno neodvisni rešitvi sta*

$$y_1(x) = e^x \cos 2x \qquad in \qquad y_2(x) = e^x \sin 2x\,.$$

Partikularno enačbo rešujemo tako, da izraz na desni nadomestimo najprej z $4e^{(1+2i)x}$. *Ker je konstanta v eksponentu ničla karakterističnega polinoma, bomo rešitve iskali z nastavkom*

$$y_p(x) = Axe^{(1+2i)x}\,.$$

Potrebujemo

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ae^{(1+2i)x}(1 + x(1+2i)) \\ y_p''(x) &= Ae^{(1+2i)x}(2(1+2i) + x(1+2i)^2)\,. \end{aligned}$$

Vstavimo in pokrajšamo $e^{(1+2i)x}$. *Dobimo*

$$A\left((2(1+2i) + x(1+2i)^2) - 2(1 + x(1+2i)) + 5x\right) = 4$$

Preračunamo in dobimo

$$A \cdot 4i = 4\,,$$

torej $A = -i$. *Iskana rešitev je imaginarni del* $Axe^{(1+2i)x}$, *kar je* $y_p(x) = -xe^x \cos 2x$. *Splošna rešitev je oblike*

$$y(x) = -xe^x \cos 2x + c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom in ničle: 3 točke.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 3 točke.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 3 točke.*
- *Konstanta A: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*

b. (15) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza pogojema $y(0) = 1$ in $y'(0) = 2$.

Rešitev: Iz začetnih pogojev moramo določiti konstanti c_1 *in* c_2 *v splošni rešitvi. Dobimo*

$$y(0) = c_1 \qquad in \qquad y'(0) = -1 + c_1 + 2c_2\,.$$

Rešitev sistema je $c_1 = 1$ *in* $c_2 = 1$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 3 točke.*
- *Sistem enačb za konstanti: 3 točke.*
- *Rešitev sistema enačb: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y^{(2)} = 12x + 2 - e^x \,.$$

a. (10) Poiščite linearno neodvisne rešitve homogene enačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom je oblike

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2$$

za ničlami $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ in $\lambda_3 = 1$ in $\lambda_4 = 2$. Linearno neodvisne rešitve so po vrsti

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 \\ y_2(x) &= x \\ y_3(x) &= e^x \\ y_4(x) &= e^{2x} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom in ničle: 4 točke.*
- *Linearno neodvisne rešitve: 6 točk.*

b. (15) Poiščite partikularno rešitev enačbe.

Rešitev: Nehomogeno enačbo lahko rešujemo posebej za $12x+2$ in $-e^x$ in rezultate seštejemo na koncu. Lotimo se najprej člena $12x+2$. Ker je $\lambda_1 = 0$ dvojna ničla karakterističnega polinoma, iščemo rešitev za nastavkom $y_p(x) = x^2(Ax+B)$. Z vstavljanjem dobimo

$$-18A + 12Ax + 4B = 12x + 2 \,,$$

torej $A = 1$ in $B = 4$. Za člen $-e^x$ uporabimo nastavek $y_p(x) = Axe^x$, ker je $\lambda_3 = 1$ ničla karakterističnega polinoma. Z vstavljanjem sledi

$$Axe^x + 4Ae^x - 3(Axe^x + 3Ae^x) + 2(Axe^x + 2Ae^x) = -e^x \,.$$

Sledi $A = 1$. Partikularna rešitev je torej

$$y_p(x) = x^3 + 4x^2 + xe^x \,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavki: 6 točke.*
- *Prvi kos: 3 točke.*
- *Drugi kos: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

3. (25) Dan naj bo sistem diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}\,.$$

a. (15) Poiščite fundamentalno matriko rešitev sistema.

Rešitev: Karakteristični polinom matrike je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

za ničlama $\lambda_1 = 2$ *in* $\lambda_2 = 4$. *Pripadajoča lastna vektorja sta* $\mathbf{x}_1 = (1,1)$ *in* $\mathbf{x}_2 = (-1,1)$. *Stolpca fundamentalne matrike rešitev sistema bosta oblike*

$$c_1 e^{2t}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{4t}\mathbf{x}_2\,.$$

Določiti moramo še konstanti, tako da bo prvi stolpec v $t = 0$ *enak* $(1,0)$ *in drugi stolpec* $(0,1)$. *Za prvi primer dobimo enačbi*

$$c_1 - c_2 = 1 \qquad in \qquad c_1 + c_2 = 0\,.$$

Rešitvi sta $c_1 = 1/2$ *in* $c_2 = -1/2$. *Podobno dobimo za drugi stolpec* $c_1 = 1/2$ *in* $c_2 = 1/2$. *Fundamentalna matrika rešitev je*

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{4x}) & \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{4x}) \\ \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{4x}) & \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{4x}) \end{pmatrix}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom in ničle: 3 točke.*
- *Lastna vektorja: 3 točke.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 3 točke.*
- *Prvi stolpec fundamentalne matrike: 3 točke.*
- *drugi stolpec fundamentalne matrike: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev, za katero je $\mathbf{y}(0) = (0,2)$.

Rešitev: Vemo, da je rešitev oblike $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{c}$, *kjer je* $\mathbf{c} = (0,2)$. *Z množenjem dobimo*

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{4t} \\ e^{2t} + e^{4t} \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 5 točk.*
- *Rešitev: 5 točk.*

4. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba oblike

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = f(x)\,.$$

a. (10) Preverite, da sta funkciji

$$y_1(x) = x \qquad \text{in} \qquad y_2(x) = \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe ($f(x) = 0$).

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 1 \\ y_1''(x) &= 0 \\ y_2'(x) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{x}{2}\cdot\frac{2}{1-x^2} \\ y_2''(x) &= \frac{2}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

Z vstavljanjem preverimo, da sta funkciji rešitvi homogene enačbe.

Izračunamo še determinanto Wronskega.

$$\begin{aligned} W(x) &= \det\begin{pmatrix} x & \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1 \\ 1 & \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{x}{2}\cdot\frac{2}{1-x^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-x^2}\,. \end{aligned}$$

Sklepamo, da sta rešitvi linearno neodvisni.

Ocenjevanje:

- *Prvi odvodi: 2 točki.*
- *Drugi dovodi: 2 točki.*
- *Preverjanje: 2 točki.*
- *Determinanta Wronskega: 2 točki.*
- *Sklep o neodvisnosti: 2 točki.*

b. (15) Poiščite partikularno rešitev zgornje enačbe, če je $f(x) = x$.

Rešitev: Vemo, da dobimo partikularno rešitev po formuli

$$y_p(x) = -y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(u)\cdot f(u)}{(1-u^2)W(u)}\,\mathrm{d}u + y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(u)\cdot f(u)}{(1-u^2)W(u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

Integriramo:

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= -y_1(x)\int^x u\cdot\left(\frac{u}{2}\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)-1\right)\mathrm{d}u + y_2(x)\int^x u^2\,\mathrm{d}u\\
&= -y_1(x)\left(\frac{x^3}{6}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{1}{3}\int^x\frac{u^3}{1-u^2}\,\mathrm{d}u-\frac{x^2}{2}\right)+y_2(x)\cdot\frac{x^3}{3}\\
&= -\frac{x^4}{6}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{6}\log(1-x^2)+\frac{x^4}{6}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{x^3}{3}\\
&= -\frac{x}{6}\log(1-x^2)\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje v nastavek: 3 točki.*
- *Integriranje: 6 točk.*
- *Rešitev: 3 točke.*

☞ Naloge iz diferencialnih enačb iz vaj prof. Mizori-Oblakove, četrta dopolnjena izdaja, 1991: 20, 38-50, 76,77, 183-192, 211-214.