FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

4. kolokvij

13. maj 1999

Ime in priimek: ______________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}\cos x\,.$$

a. (15) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Najprej poiščemo linearno neodvisni rešitvi homogeme enačbe. Karakteristični polinom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

z ničlama $\lambda_1 = 2 + i$ in $\lambda_2 = 2 - i$. Linearno neodvisnoi rešitvi sta

$$y_1(x) = e^{2x}\cos x \qquad in \qquad y_2(x) = e^{2x}\sin x\,.$$

Partikularno enačbo rešujemo tako, da izraz na desni nadomestimo najprej z $4e^{(2+i)x}$. Ker je konstanta v eksponentu ničla karakterističnega polinoma, bomo rešitve iskali z nastavkom

$$y_p(x) = Axe^{(2+i)x}\,.$$

Potrebujemo

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ae^{(2+i)x}(1 + x(2+i)) \\ y_p''(x) &= Ae^{(2+i)x}(2(2+i) + x(2+i)^2)\,. \end{aligned}$$

Vstavimo in pokrajšamo $e^{(2+i)x}$. Dobimo

$$A\left((2(2+i) + x(2+i)^2) - 4(1 + x(2+i)) + 5x\right) = 2$$

Preračunamo in dobimo

$$A \cdot 2i = 2\,,$$

torej $A = -i$. Iskana rešitev je realni del $Axe^{(2+i)x}$, kar je $y_p(x) = xe^{2x}\sin x$. Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = xe^{2x}\sin x + c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\sin x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom in ničle: 3 točke.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 3 točke.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 3 točke.*
- *Konstanta A: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza pogojema $y(0) = 0$ in $y'(0) = 2$.

Rešitev: Iz začetnih pogojev moramo določiti konstanti c_1 in c_2 v splošni rešitvi. Dobimo

$$y(0) = c_1 \qquad in \qquad y'(0) = 2c_1 + c_2\,.$$

Rešitev sistema je $c_1 = 0$ in $c_2 = 2$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 3 točke.*
- *Sistem enačb za konstanti: 3 točke.*
- *Rešitev sistema enačb: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba

$$y^{(4)} - 6y^{(3)} + 5y^{(2)} = 30x - 26 + 100e^{5x}\,.$$

a. (10) Poiščite linearno neodvisne rešitve homogene enačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom je oblike

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 5\lambda^2$$

za ničlami $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ in $\lambda_3 = 1$ in $\lambda_4 = 5$. Linearno neodvisne rešitve so po vrsti

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 \\ y_2(x) &= x \\ y_3(x) &= e^x \\ y_4(x) &= e^{5x} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom in ničle: 4 točke.*
- *Linearno neodvisne rešitve: 6 točk.*

b. (15) Poiščite partikularno rešitev enačbe.

Rešitev: Nehomogene enačbo lahko rešujemo posebej za $30x - 26$ in $100e^{5x}$ in rezultate seštejemo na koncu. Lotimo se najprej člena $36x - 26$. Ker je $\lambda_1 = 0$ dvojna ničla karakterističnega polinoma, iščemo rešitev za nastavkom $y_p(x) = x^2(Ax + B)$. Z vstavljanjem dobimo

$$-36A + 30Ax + 10B = 30x - 26\,,$$

torej $A = 1$ in $B = 1$. Za člen $100e^{5x}$ uporabimo nastavek $y_p(x) = Axe^{5x}$, ker je $\lambda_3 = 5$ ničla karakterističnega polinoma. Z vstavljanjem sledi

$$625Axe^x + 500Ae^x - 6(125Axe^{5x} + 75Ae^{5x}) + 5(25Axe^{5x} + 10e^{5x}) = 100e^{5x}\,.$$

Sledi $A = 1$. Partikularna rešitev je torej

$$y_p(x) = x^3 + x^2 + xe^{5x}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavki: 6 točke.*
- *Prvi kos: 3 točke.*
- *Drugi kos: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba oblike

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = f(x)\,.$$

a. (10) Preverite, da sta funkciji

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \qquad \text{in} \qquad y_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe ($f(x) = 0$).

Rešitev: Najprej preverimo, da sta y_1 in y_2 res rešitvi diferencialne enačbe. Z odvajanjem dobimo

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\left(-\frac{\cos x}{2} - x\sin x\right) \\ y_1''(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^5}}\left(\frac{3\cos x}{4} - x^2\cos x + x\sin x\right) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\left(x\cos x - \frac{\sin x}{2}\right) \\ y_2''(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^5}}\left(-x\cos x + \frac{3\sin x}{4} - x^2\sin x\right). \end{aligned}$$

Odvode vstavimo v enačbo in se prepričamo, da sta dani funkciji res rešitvi. Izračunamo še determinanto Wronskega.

$$\begin{aligned} W(x) &= \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\pi}\det\begin{pmatrix} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} & \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \\ \frac{1}{\sqrt{x^3}}(-\frac{\cos x}{2} - x\sin x) & \frac{1}{\sqrt{x^3}}(x\cos x - \frac{\sin x}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\pi x} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prvi odvodi: 2 točki.*
- *Drugi dovodi: 2 točki.*
- *Preverjanje: 2 točki.*
- *Determinanta Wronskega: 2 točki.*
- *Sklep o neodvisnosti: 2 točki.*

b. (15) Poiščite partikularno rešitev zgornje enačbe, če je $f(x) = x^{3/2}$.

Rešitev: Vemo, da dobimo partikularno rešitev po formuli

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(u) \cdot f(u)}{x^2 W(u)} \, \mathrm{d}u + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(u) \cdot f(u)}{x^2 W(u)} \, \mathrm{d}u \, .$$

Integriramo:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_1(x) \int^{x} \sin u \, \mathrm{d}u + \sqrt{\frac{\pi}{2}} y_2(x) \int^{x} \cos u \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 4 točke.*
- *Pravilno vstavljanje v nastavek: 4 točki.*
- *Integriranje: 3 točki.*
- *Rešitev: 4 točki.*