FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

4. kolokvij

31. maj 2001

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** [| | | | | | |]

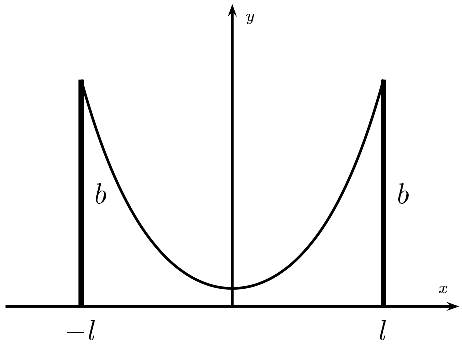
Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Obliko vrvi, napete kot na sliki 1, opisuje diferencialna enačba verižnice

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+[y']^2}\,.$$



Sl. 1 Vrv, napeta med dvema točkama.

a. (15) Pokažite, da je splošna rešitev te enačbe oblike

$$y(x) = a\cosh(\frac{x+c}{a}) + d$$

za neki konstanti c in d.

Namig: Označite $y' = w$ in poiščite najprej w.

Rešitev: Sledimo namigu in označimo $y' = w$. Diferencialno enačbo prepišemo v

$$w' = \frac{1}{a}\sqrt{1+w^2}\,.$$

To je enačba prvega reda z ločljivima spremenljivkama. Prepišemo v

$$\frac{w'}{\sqrt{1+w^2}} = \frac{1}{a}\,,$$

integriramo in dobimo

$$\operatorname{arcsinh}(w) = \frac{x+c}{a}$$

za neko konstanto c. Torej je

$$y' = w = \sinh\left(\frac{x+c}{a}\right)\,.$$

Integriramo še enkrat in dobimo

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x+c}{a}\right) + d\,.$$

Ocenjevanje:

- *Enačba za w: 3 točke.*
- *Ugotovitev, da je to enačba z ločljivima spremenljivkama: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Invertiranje: 3 točke.*
- *Ponovno integriranje: 3 točke.*

b. (10) Določite konstanti c in d tako, da bo

$$y(-l) = y(l) = b\,.$$

Rešitev: Vstavimo v splošno rešitev in dobimo

$$y(l) = a\cosh\left(\frac{l+c}{a}\right) + d = b \qquad \textit{in} \qquad y(-l) = a\cosh\left(\frac{-l+c}{a}\right) + d = b\,.$$

Zaradi sodosti funkcije $\cosh(x)$ *mora biti*

$$\frac{l+c}{a} = -\frac{-l+c}{a}\,,$$

torej

$$\frac{2c}{a} = 0\,.$$

Sledi $c = 0$. *Potrebujemo še* d. *Iz prve enačbe sledi*

$$d = b - a\cosh\left(\frac{l}{a}\right)\,.$$

Končna rešitev je

$$y(x) = b + a\left[\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{l}{a}\right)\right]\,.$$

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje l in $-l$: 2 točki.*
- *Uporaba sodosti: 2 točki.*
- *c: 2 točki.*
- *d: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

2. (25) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y'' + 2y' + 5y = 4\,e^{-x}\sin(2x)\,.$$

a. (15) Poiščite partikularno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ *ima dve kompleksno konjugirani rešitvi* $-1+2i$ *in* $-1-2i$. *V enačbi desno stran nadomestimo z*

$$4\,e^{(-1+2i)x}\,.$$

Ker je koeficient pred x *v eksponentu ničla* $P(\lambda)$ *(enojna), iščemo rešitev z nastavkom*

$$y_p(x) = Axe^{(-1+2i)x}\,.$$

Odvajamo in dobimo

$$y_p'(x) = A(1 + x(-1+2i))e^{(-1+2i)x}$$

in

$$y_p''(x) = A(2(-1+2i) + x(-1+2i)^2)e^{(-1+2i)x}\,.$$

Vstavimo v enačbo in preuredimo.

$$A\left[x((-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 5) + 2(-1+2i) + 2\right]e^{(-1+2i)x} = 4\,e^{(-1+2i)x}\,.$$

Zmnožimo in sledi

$$4i \cdot A = 4\,,$$

torej

$$A = -i\,.$$

Partikularna rešitev bo imaginarni del produkta

$$(-i)\cdot x \cdot e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)\,,$$

torej

$$y_p(x) = -xe^{-x}\cos 2x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ničle karakterističnega polinoma: 3 točke.*
- *Nastavek: 3 točke.*
- *Odvajanje: 3 točke.*
- *Konstanta A: 3 točke.*
- *Rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza začetnima pogojema $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Vemo, da je splošna rešitev oblike

$$y(x) = -xe^{-x}\cos 2x + c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x\,.$$

Določiti moramo konstante tako, da bo zadoščeno začetnima pogojema, torej

$$y(0) = c_1 = 0$$

in

$$y'(0) = -1 - c_1 + 2c_2 = 0\,.$$

Sledi $c_1 = 0$ *in* $c_2 = 1/2$. *Rešitev je torej*

$$y(x) = -xe^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Enačbi za koeficiente: 2 točki.*
- *Koeficienta: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

3. (25) Dan naj bo sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -(\alpha+\beta)y_1 + \beta y_2 + b_1(t) \\ \dot{y}_2 &= \beta y_1 - (\alpha+\beta)y_2 + b_2(t)\,, \end{aligned}$$

pri čemer je $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

a. (15) Poiščite fundamentalno matriko rešitev homogenega sistema.

Rešitev: Matrika homogenega sistema je oblike

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \beta \\ \beta & -\alpha-\beta \end{pmatrix}.$$

Potrebujemo lastne vrednosti in lastne vektorje te matrike. Karakteristični polinom je oblike

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2(\alpha+\beta)\lambda + \alpha^2 + 2\alpha\beta$$

z ničlama

$$\lambda_1 = -\alpha \qquad in \qquad \lambda_2 = -\alpha - 2\beta\,.$$

Pripadajoča lastna vektorja sta $\mathbf{x}_1 = (1,1)$ *in* $\mathbf{x}_2 = (1,-1)$. *Stolpca fundamentalne matrike rešitev bosta linearni kombinaciji oblike*

$$c_1 e^{-\alpha t}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{(-\alpha-2\beta)t}\mathbf{x}_2\,.$$

Za prvi stolpec dobimo $c_1 = c_2 = 1/2$, *za drugi pa* $c_1 = 1/2$ *in* $c_2 = -1/2$. *Fundamentalna matrika rešitev je*

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\alpha t} + \frac{1}{2}e^{(-\alpha-2\beta)t} & \frac{1}{2}e^{-\alpha t} - \frac{1}{2}e^{(-\alpha-2\beta)t} \\ \frac{1}{2}e^{-\alpha t} - \frac{1}{2}e^{(-\alpha-2\beta)t} & \frac{1}{2}e^{-\alpha t} + \frac{1}{2}e^{(-\alpha-2\beta)t} \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 3 točke.*
- *Lastna vektorja: 3 točke.*
- *Nastavek za stolpca: 3 točke.*
- *Enačbe za konstante: 3 točke.*
- *Matrika: 3 točke.*

b. (10) Rešite še nehomogeni sistem, če je $b_1(t) = b$ in $b_2(t) = 0$ in velja $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

Rešitev: Enačba je nehomogena, pri čemer je

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiskati moramo partikularno rešitev. Ker je $\mathbf{b}$ *konstanten vektor, je tudi partikularna rešitev konstanten vektor, ki zadošča enačbi*

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_p = -\mathbf{b}\,.$$

Za rešitev dobimo

$$\mathbf{y}_p = \frac{b}{\alpha(\alpha+2\beta)} \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Zadostiti moramo še začetnim pogojem. Splošna rešitev je

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + \mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{c}\,.$$

Dobimo enačbo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{b}{\alpha(\alpha+2\beta)} \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \beta \end{pmatrix} + \mathbf{c}\,.$$

Sledi

$$\mathbf{c} = -\mathbf{y}_p\,.$$

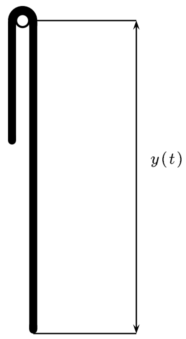
Rešitev je

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= (\mathbf{I}-\mathbf{Y}(t))\,\mathbf{y}_p \\ &= \frac{b}{\alpha(\alpha+2\beta)} \begin{pmatrix} \alpha+\beta-\frac{1}{2}(\alpha+2\beta)e^{-\alpha t}-\frac{1}{2}\beta e^{-(\alpha+2\beta)t} \\ \beta-\frac{1}{2}(\alpha+2\beta)e^{-\alpha t}+\frac{1}{2}\alpha e^{-(\alpha+2\beta)t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 2 točki.*
- *Rešitev po nastavku: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Enačba za* $\mathbf{c}$*: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

4. (25) Veriga dolžine L visi na palici in drsi brez trenja. Označimo z $y(t)$ dolžino dela verige na desni strani kot na sliki 2.



Slika 2 Položaj verige v trenutku t.

a. (15) Naj bo m masa verige. Po Newtonovem zakonu funkcija $y(t)$ za $y > L/2$ ustreza diferencialni enačbi

$$m\ddot{y} = \left(\frac{2y - L}{L}\right) mg\,.$$

Poiščite splošno rešitev enačbe.

Rešitev: Pokrajšamo m in enačbo prepišemo v

$$\ddot{y} - \frac{2g}{L} \cdot y = -g\,.$$

Enačba je nehomogena linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Označimo $2g/L = \omega^2$. Homogena enačba ima linearno neodvisni rešitvi

$$y_1(t) = \cosh(\omega t) \qquad \textit{in} \qquad y_2(t) = \sinh(\omega t)\,.$$

Potrebujemo še partikularno rešitev. Na levi strani je konstanta, zato bo tudi partikularna rešitev konstanta. Z vstavljanjem sledi $y_p(t) = L/2$. Splošna rešitev bo torej

$$y(t) = \frac{L}{2} + c_1 y_1 + c_2 y_2\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe v običajno obliko: 3 točke.*
- *Opazka, da je enačba nehomogena linearna: 3 točke.*
- *Rešitvi homogene enačbe: 3 točke*
- *Partikularna rešitev: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*

b. (10) V kolikšnem času bo veriga zdrsnila s palice ($y(t) = L$), če je $y(0) = a > L/2$ in $\dot{y}(0) = 0$.

Rešitev: V splošni rešitvi iz a. izberemo konstanti c_1 in c_2, da bo zadoščeno začetnima pogojema. Dobimo enačbi

$$L/2 + c_1 = a \qquad \text{in} \qquad c_2\,\omega = 0$$

Sledi

$$y(t) = \frac{L}{2} + \left(a - \frac{L}{2}\right)\cosh(\omega t)\,.$$

V času t_0, ko bo veriga zdrsnila s palice, bo $y(t_0) = L$. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$L = \frac{L}{2} + \left(a - \frac{L}{2}\right)\cosh(\omega t_0)\,.$$

Sledi

$$\frac{L}{2a - L} = \cosh(\omega t_0)$$

ali

$$t_0 = \frac{1}{\omega}\log\left(\frac{L}{2a-L} + \sqrt{\left(\frac{L}{2a-L}\right)^2 - 1}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Enačbi za konstante: 2 točki.*
- *Rešitev enačbe: 2 točki.*
- *Enačba za čas: 2 točki.*
- *Pretvorba enačbe na čisto obliko: 2 točki.*
- *Končna formula: 2 točki.*