FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

4. kolokvij

23. maj 2003

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Konstruirati želimo zrcalo, ki bo vsak žarek iz izhodišča koordinatnega sistema odbilo v smeri osi x. Naj bo zgornji del zrcala graf funkcije y. Veljati mora diferencialna enačba

$$y' = \frac{y - xy'}{x + yy'} .$$

a. (15) Definirajte funkcijo

$$w(x) = \frac{1}{2}(x^2 + [y(x)]^2) .$$

Pokažite, da funkcija w ustreza diferencialni enačbi $w' = \sqrt{2w}$.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$w' = x + yy' .$$

Sledi

$$y' = \frac{w' - x}{y} .$$

Vstavimo v enačbo in upoštevajmo, da je $2w = x^2 + y^2$. *Dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{w' - x}{y} &= \frac{y - x \cdot \frac{w'-x}{y}}{w'} \\ &= \frac{y^2 - xw' + x^2}{w'y} \\ &= \frac{2w - xw'}{w'y} . \end{aligned}$$

Sledi

$$(w' - x)w' = 2w - xw'$$

ali

$$[w']^2 = 2w .$$

Ocenjevanje:

- *Odvod* w*: 3 točke.*
- *Izračun* y'*: 3 točke.*
- *Vstavljanje: 3 točke.*
- *Upoštevanje* $x^2 + y^2 = 2w$*: 3 točke.*
- *Premetavanje in končni rezultat: 3 točke.*

b. (10) Rešite diferencialno enačbo za y pri začetnem pogoju $y(-a) = 0$ za $a > 0$.

Namig: Upoštevajte a.

Rešitev: Začetni pogoj za funkcijo y se prevede v začetni pogoj $w(-a) = a^2/2$ za funkcijo w. Enačbo za w prepišemo v

$$\frac{w'}{\sqrt{2w}} = 1\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\sqrt{2w} = x + c\,.$$

Iz začetnega pogoja sledi $a = \sqrt{2w(-a)} = -a + c$, torej $c = 2a$. Sledi

$$w(x) = \frac{1}{2}(x + 2a)^2\,.$$

Ker je $2w = x^2 + y^2$, dobimo

$$x^2 + y^2 = (x + 2a)^2\,.$$

Sledi

$$y = 2\sqrt{a(x + a)}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za ločljive spremenljivke: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Upoštevanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Zveza w in y: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

2. (25) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y^{(4)} - y = g(x)\,.$$

a. (10) Poiščite linearno neodvisne rešitve homogenega dela zgornje enačbe.

Rešitev: Najprej izračunamo karakteristični polinom. Dobimo

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i)\,.$$

Linearno neodvisne rešitve so e^x, e^{-x}, $\cos x$ *in* $\sin x$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Realni ničli: 2 točki.*
- *Imaginarni ničli: 2 točki.*
- *Prvi par neodvisnih rešitev: 2 točki.*
- *Drugi par neodvisnih rešitev: 2 točki.*

b. (15) Poiščite splošno rešitev enačbe, če je $g(x) = e^x \cos x$.

Rešitev: Desno stran zamenjamo z $e^{(1+i)x}$. *Ker* $1+i$ *ni ničla karakterističnega polinoma, bo partikularna rešitev oblike* $y_p = Ae^{(1+i)x}$ *za kompleksno število* A. *Vstavimo v enačbo in dobimo*

$$A(1+i)^4 e^{(1+i)x} - Ae^{(1+i)x} = e^{(1+i)x}\,.$$

Pokrajšamo in dobimo enačbo

$$A((1+i)^4 - 1) = 1\,.$$

Računamo

$$(1+i)^4 - 1 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 - 1 = -5\,,$$

torej $A = -1/5$. *Partikularna rešitev je enaka realnemu delu* $Ae^{(1+i)x}$, *torej*

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} e^x \cos x\,.$$

Splošna rešitev je potem enaka

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis v kompleksno obliko: 3 točke.*
- *Nastavek: 3 točke.*
- *Vstavljanje nastavka v enačbo: 3 točke.*
- *A: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*

3. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

na intervalu $[\pi/2, \infty)$.

a. (10) Pokažite, da sta funkciji

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{in} \quad y_2(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

linearno neodvisni rešitvi diferencialne enačbe.

Rešitev: Računamo, recimo, za y_1. Z odvajanjem dobimo

$$y_1'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

in

$$y_1''(x) = \frac{-2x\cos x + 2\sin x - x^2\sin x}{x^3}.$$

Preverimo, da y_1 reši diferencialno enačbo. Vstavimo in dobimo

$$\begin{aligned} y_1'' + \frac{2}{x}y_1' + y_1 &= \frac{-2x\cos x + 2\sin x - x^2\sin x}{x^3} + \frac{2}{x}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{-2x\cos x + 2\sin x - x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + x^2\sin x}{x^3} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Podobno preverimo, da je y_2 rešitev. Za dokaz linearne neodvisnosti izračunamo determinanto Wronskega

$$W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 = \frac{1}{x^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje y_1: 2 točki.*
- *Vstavljanje y_1: 2 točki.*
- *Odvajanje y_2: 2 točki.*
- *Vstavljanje y_2: 2 točki.*
- *Linearna neodvisnost: 2 točki.*

b. (15) Rešite nehomogeno enačbo

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{\sin x}{x}\,.$$

pri začetnih pogojih $y(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0$.

Rešitev: Po formuli je partikularna rešitev enaka

$$y_p(x) = -y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(u)g(u)}{W(u)}\,\mathrm{d}u + y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(u)g(u)}{W(u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

V našem primeru je $W(u) = 1/u^2$ *in* $g(u) = \sin u/u$. *Izberimo še* $x_0 = \pi/2$. *Dobimo*

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{\sin x}{x}\int_{\pi/2}^{x} \cos u \sin u\,\mathrm{d}u - \frac{\cos x}{x}\int_{\pi/2}^{x} \sin^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\sin x\cos^2 x}{2x} - \frac{\cos x\cdot(-\pi+2x-\sin(2x))}{4x}\,. \\ &= -\frac{\sin(2x)\cos x + (-\pi+2x)\cos x - \cos x\sin(2x)}{4x} \\ &= -\frac{\cos x}{2} + \frac{\pi}{4}\,y_2(x)\,. \end{aligned}$$

Splošna rešitev je torej

$$y(x) = -\frac{\cos x}{2} + c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\,,$$

pri čemer smo kos z y_2 *v* y_p *"skrili" v konstanto* c_2. *Poskrbeti moramo še za začetne pogoje. Dobimo*

$$y(\pi/2) = \frac{2c_1}{\pi} = 0\,,$$

torej $c_1 = 0$. *Računamo*

$$y'(\pi/2) = \frac{1}{2} + \frac{2c_2}{\pi} = 0\,,$$

torej $c_2 = -\pi/4$. *Končna rešitev je*

$$y(x) = -\frac{\cos x}{2} + \frac{\pi\cos x}{4x}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 3 točke.*
- *Vstavljanje in integriranje: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*
- *Enačbe za konstante: 3 točke.*
- *Končna rešitev: 3 točke.*

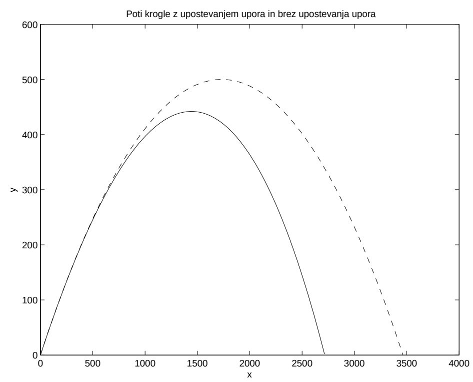
4. (25) Let topovske krogle ob upoštevanju linearnega zakona zračnega upora opisujeta diferencialni enačbi

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = 0 \qquad \text{in} \qquad m\ddot{y} + k\dot{y} = -mg\,.$$

Pri tem je m masa krogle, k koeficient zračnega upora in g zemeljski pospešek. Kroglo izstrelimo iz izhodišča koordinatnega sistema pod kotom α z začetno hitrostjo v. Začetni pogoji so tako

$$x(0) = y(0) = 0 \quad \text{in} \quad \dot{x}(0) = v\cos\alpha \;\; \dot{y}(0) = v\sin\alpha\,.$$

Let krogle je na sliki 1 (polna črta) v primerjavi s parabolo (črtkana črta), ki jo dobimo, če ne upoštevamo zračnega upora.



Slika 1 Poti krogle z upoštevanjem zračnega upora in brez upoštevanja upora.

a. (15) Poiščite funkcijo y.

Rešitev: Karakteristična polinoma za obe enačbi sta enaka

$$P(\lambda) = m\lambda^2 + k\lambda\,.$$

Ničli sta $\lambda = 0$ in $\lambda = -k/m$. Za y potrebujemo partikularno rešitev. Uganemo, da je

$$y_p(t) = -\frac{mgt}{k}\,.$$

Splošna rešitev bo

$$y(t) = -\frac{mgt}{k} + c_3 + c_4 e^{-kt/m}\,.$$

Konstante določimo iz začetnih pogojev. Dobimo enačbi

$$c_3 + c_4 = 0 \quad \textit{in} \quad -\frac{mg}{k} - \frac{c_4 k}{m} = v\sin\alpha\,.$$

Sledi

$$c_4 = -\frac{m}{k}\left(\frac{mg}{k} + v\sin\alpha\right)$$

in $c_3 = -c_4$. *Dobimo*

$$y(t) = -\frac{mgt}{k} + \frac{m}{k}\left(\frac{mg}{k} + v\sin\alpha\right)(1 - e^{-kt/m}) .$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinoma in ničle: 3 točke.*
- *Rešitvi homogenega dela: 3 točke.*
- *Partikularna rešitev za y: 3 točke.*
- *Splošna rešitev za y: 3 točke.*
- *c_3 in c_4: 3 točke.*

b. (10) Za čas T letenja krogle velja enačba

$$1 - e^{-kT/m} = \frac{kgT}{mg + kv\sin\alpha} .$$

Pokažite, da je domet topa pri danih začetnih pogojih enak

$$D = x(T) = \frac{mgvT\cos\alpha}{mg + vk\sin\alpha} ,$$

kjer je T čas letenja krogle.

Rešitev: Splošna rešitev prve enačbe je

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-kt/m} .$$

Iz začetnih pogojev sledi

$$c_1 + c_2 = 0 \quad in \quad -kc_2/m = v\cos\alpha .$$

Sledi $c_2 = -mv\cos\alpha/k$ *in* $c_1 = -c_2$. *Dobimo*

$$x(t) = \frac{mv\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt/m}) .$$

Domet je enak

$$\begin{aligned} x(T) &= \frac{mv\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kT/m}) \\ &= \frac{mv\cos\alpha}{k} \cdot \frac{kgT}{mg + kv\sin\alpha} \\ &= \frac{mgvT\cos\alpha}{mg + vk\sin\alpha} . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev za x: 2 točki.*
- *Upoštevanje začetnih pogojev: 2 točki.*
- *Vstavljanje $1 - e^{-kT/m}$: 2 točki.*
- *Pretvarjanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*