FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

4. kolokvij

23. maj 2003

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Konstruirati želimo zrcalo, ki bo vsak žarek iz izhodišča koordinatnega sistema odbilo v smeri osi x. Naj bo zgornji del zrcala graf funkcije y. Veljati mora diferencialna enačba

$$y' = \frac{y - xy'}{x + yy'}\,.$$

a. (15) Definirajte funkcijo

$$w(x) = \frac{1}{2}(x^2 + [y(x)]^2)\,.$$

Pokažite, da funkcija w ustreza diferencialni enačbi $w' = \sqrt{2w}$.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$w' = x + yy'\,.$$

Sledi

$$y' = \frac{w' - x}{y}\,.$$

Vstavimo v enačbo in upoštevajmo, da je $2w = x^2 + y^2$. Dobimo

$$\begin{aligned} \frac{w' - x}{y} &= \frac{y - x \cdot \frac{w'-x}{y}}{w'} \\ &= \frac{y^2 - xw' + x^2}{w'y} \\ &= \frac{2w - xw'}{w'y}\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$(w' - x)w' = 2w - xw'$$

ali

$$[w']^2 = 2w\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvod w: 3 točke.*
- *Izračun y': 3 točke.*
- *Vstavljanje: 3 točke.*
- *Upoštevanje $x^2 + y^2 = 2w$: 3 točke.*
- *Premetavanje in končni rezultat: 3 točke.*

b. (10) Rešite diferencialno enačbo za y pri začetnem pogoju $y(0) = 2a$ za $a > 0$.

Namig: Upoštevajte a.

Rešitev: Začetni pogoj za funkcijo y se prevede v začetni pogoj $w(0) = 2a^2$ za funkcijo w. Enačbo za w prepišemo v

$$\frac{w'}{\sqrt{2w}} = 1\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\sqrt{2w} = x + c\,.$$

Iz začetnega pogoja sledi $2a = c$. Sledi

$$w(x) = \frac{1}{2}(x + 2a)^2\,.$$

Ker je $2w = x^2 + y^2$, dobimo

$$x^2 + y^2 = (x + 2a)^2\,.$$

Sledi

$$y = 2\sqrt{a(x + a)}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za ločljive spremenljivke: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Upoštevanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Zveza w in y: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

2. (25) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = g(x)\,.$$

a. (10) Naj bo $g(x) = x$. Poiščite splošno rešitev zgornje eneačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom je $P(\lambda) = (\lambda+1)^3$. *Ničla* $\lambda = -1$ *je trojna, torej so linearno neodvisne rešitve homogene enačbe enake* $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$ *in* $y_3 = x^2e^{-x}$. *Partikularno rešitev iščemo z nastavkom* $y_p(x) = a + bx$. *Vstavimo v enačbo in dobimo*

$$3b + (a + bx) = x\,,$$

torej $b = 1$ *in* $a = -3$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničle: 2 točki.*
- *Linearno neodvisne rešitve: 2 točki.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Splošna reštev: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $g(x) = e^{-x}$. Poiščite rešitev diferencialne enačbe pri pogoju $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Rešitev: Linearno neodvisne rešitve homogene enačbe že poznamo. Ker je $\lambda = -1$ *trojna rešitev karakterističnega polinoma, bomo iskali partikularno rešitev z nstavkom* $y_p(x) = ax^3e^{-x}$. *Odvajamo in vstavimo v enačbo. Dobimo*

$$6ae^{-x} = e^{-x}\,,$$

torej je $y_p(x) = x^3e^{-x}/6$. *Splošna rešitev bo oblike*

$$y(x) = \frac{x^3e^{-x}}{6} + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}\,.$$

Določiti moramo še konstante. Iz prve zahteve dobimo $c_1 = 0$, *iz druge sledi* $c_2 = 0$ *in iz tretje* $c_3 = 0$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek za partikularno rešitev: 3 točke.*
- *Odvajanje: 3 točke.*
- *Partikularna rešitev: 3 točke.*
- *Enačbe za konstante: 3 točke.*
- *Rešitev: 3 točke.*

3. (25) Legendrova diferencialna enačba je dana z

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}\, y' - \frac{1}{(1-x^2)^2}\, y = 0\,.$$

a. (10) Pokažite, da sta na intervalu $[0,1)$ funkciji

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \in \quad y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

linearno neodvisni rešitvi zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Preverimo, recimo, za y_1. Z odvajanjem dobimo

$$y_1' = \frac{1}{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}} \quad in \quad y_1'' = \frac{1+2x}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{5/2}}\,.$$

Z vstavljanjem v diferenicalno enačbo preverimo, da je Y_1 rešitev. se prepričamo za y_2. Izračunajmo še determinanto Wronskega.

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\ &= \frac{(1+x)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}} \cdot \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{(1-x)^{3/2}}{(1+x)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{(1+x)x}{(1-x^2)^2} - \frac{(1+x)}{(1-x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{1-x^2}\,. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0,1)$ je $W(x) \neq 0$, kar pomeni, da sta rešitvi linearno neodvisni.

Ocenjevanje:

- *Odvajanje y_1: 2 točki.*
- *Vstavljanje y_1: 2 točki.*
- *Odvajanje y_2: 2 točki.*
- *Formula za Wronskega: 2 točki.*
- *Linearna neodvisnost: 2 točki.*

b. (15) Poiščite rešitev nehomogene enačbe

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}\, y' - \frac{1}{(1-x^2)^2}\, y = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,.$$

pri začetnih pogojih $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Po formuli je partikularna rešitev enaka

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(u) g(u)}{W(u)}\, \mathrm{d}u + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(u) g(u)}{W(u)}\, \mathrm{d}u\,.$$

V našem primeru je $g(u) = -1/\sqrt{1-u}$. *Izberimo* $x_0 = 0$. *Računamo*

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{y_2(u)g(u)}{W(u)}\,\mathrm{d}u &= \int_0^x \sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{3}(1+u)^{3/2}|_0^x \\ &= \frac{2}{3}((1+x)^{3/2}-1)\,.\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{y_1(u)g(u)}{W(u)}\,\mathrm{d}u &= \int_0^x (1+u)^{5/2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{5}(1+u)^{5/2}|_0^x \\ &= \frac{2}{5}((1+x)^{5/2}-1)\,.\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} y_p(x) = & \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}((1-x)^{3/2}-1) + \frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}((1+x)^{5/2}-1) \\ &= -\frac{4(1+x)^2}{15\sqrt{1-x}} + \frac{2\sqrt{1+x}}{3\sqrt{1-x}} - \frac{2}{5\sqrt{1-x^2}}\,.\end{aligned}$$

Drugi in tretji člen sta večkratnika rešitev homogenega sistema, zato lahko za partikularno rešitev izberemo kar

$$y_p(x) = -\frac{4(1+x)^2}{15\sqrt{1-x}}\,.$$

Splošna rešitev bo

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2\,.$$

Iz $y_p(0) = -4/15$ *in* $y_1(0) = y_2(0) = 1$ *sledi*

$$-\frac{4}{15} + c_1 + c_2 = 0\,.$$

Izračunamo še $y_1'(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$ *in*

$$y_p'(0) = -\frac{2}{3}\,.$$

Sledi

$$-\frac{2}{3} + c_1 = 0$$

ali $c_1 = 2/3$ *in* $c_2 = -2/5$.

Ocenjevanje:

- *Formula: 3 točke.*
- *Vstavljanje: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Partikularna rešitev: 3 točke.*
- *Upoštevanje začetnih pogojev: 3 točke.*

4. (25) Zamislite si, da skozi zemljo izkopljemo raven rov, ki gre skozi središče. Na površju zemlje v rov spustimo kamen z maso m, ki prosto pada. Naj bo R polmer zemlje in m_z njena masa. Z $x(t)$ označimo oddaljenost kamna od središča zemlje, tako da je $x(0) = R$. Na začetku je $\dot{x}(0) = 0$. Ob upoštevanju linearnega zakona zračnega upora opisuje gibanje kamna, dokler ni njegova hitrost enaka 0, diferencialna enačba

$$m\ddot{x} = -\frac{k\, m\, m_z\, x}{R^3} - c\dot{x}\,,$$

kjer je k gravitacijska konstanta in c konstanta zračnega upora. Označite

$$\alpha = \frac{c}{m} \qquad \text{in} \qquad \beta = \frac{km_z}{R^3}$$

in predpostavite $\alpha^2 - 4\beta = \gamma^2 > 0$.

a. (10) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Enačbo prepišimo v

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \frac{k\, m\, m_z\, x}{R^3} = 0\,.$$

Delimo z m in označimo $\alpha = c/m$ in $\beta = km_z/R^3$. Karakteristični polinom te linearne diferencialne enačbe drugega reda je

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$$

z ničlama

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} = \frac{-\alpha \pm \gamma}{2}\,.$$

Splošna rešitev bo oblike

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je enačba linearna: 3 točke.*
- *Prepis v običjno obliko: 3 točke.*
- *Ničli karakterističnega polinoma: 3 točke.*
- *Pripadajoče rešitve: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*

b. (15) Začetni pogoji so dani z $x(0) = R$ in $\dot{x}(0) = 0$. V času $t_0 = \frac{1}{\gamma}\log(\lambda_1/\lambda_2)$ bo kamen v središču zemlje. Izračunajte njegovo hitrost v trenutku t_0.

Rešitev: Iz začetnih pogojev dobimo

$$x(0) = c_1 + c_2 = R \qquad \mathit{in} \qquad \dot{x}(0) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 0\,.$$

Sledi

$$c_1 = -\frac{R\lambda_2}{\gamma} \qquad \mathit{in} \qquad c_2 = \frac{R\lambda_1}{\gamma}\,.$$

Rešitev enačbe je

$$x(t) = \frac{R}{\gamma}\left(-\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t}\right) .$$

Hitrost v trenutku t_0 *je*

$$\dot{x}(t_0) = \frac{R\lambda_1\lambda_2}{\gamma}\left(-e^{\lambda_1 t_0} + e^{\lambda_2 t_0}\right) .$$

Odgovor lahko še poenostavimo in označimo $\lambda_1/\lambda_2 = \rho$ *in dobimo*

$$\dot{x}(t_0) = \frac{R\beta}{\gamma}(-\rho^{\lambda_1/\gamma} + \rho^{\lambda_2/\gamma}) .$$

Ocenjevanje:

- *Upoštevanje prvega začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Upoštevanje drugega začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Konstanti: 2 točki.*
- *Odvajanje* x*: 2 točki.*
- *Hitrost: 2 točki.*