FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

4. kolokvij

27. maj 2005

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (25) Funkcija y naj ustreza diferencialni enačbi prvega reda

$$y = x\left(y' + \sqrt{1+[y']^2}\right) .$$

a. (15) Pokažite, da velja

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$$

in poiščite splošno rešitev enačbe.

Namig: Izrazite y'.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$\frac{y}{x} - y' = \sqrt{1+[y']^2} .$$

Ob strani kvadriramo. Dobimo

$$\frac{y^2}{x^2} - \frac{2yy'}{x} = 1 .$$

Sledi

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) .$$

Ta enačba je homogena in uporabimo nastavek $u(x) = y(x)/x$. Vstavimo to v enačbo in sledi

$$u'x + u = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

ali

$$u' = -\frac{1+u^2}{2xu} .$$

Ta zadnja enačba je enačba z ločljivima spremenljivkama. Prepišemo v

$$\int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} .$$

Sledi

$$\log(1+u^2) = -\log(x) + \log(2c) ,$$

kjer je c še poljubna pozitivna konstanta. Izračunamo

$$\frac{x^2+y^2}{x^2} = \frac{2c}{x} ,$$

torej

$$x^2 + y^2 = 2cx .$$

Sledi

$$(x-c)^2 + y^2 = c^2 .$$

Končno izračunamo

$$y = \pm\sqrt{c^2 - (x-c)^2}$$

za neko konstanto $c > 0$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z logaritmom: 3 točke.*
- *Pretvorba na homogeno enačbo: 3 točke.*
- *Uvedba u: 3 točke.*
- *Integiranje in u: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev na intervalu $[1, 2]$, za katero velja $y(1) = 1$.

Rešitev: V splošno rešitev vstavimo začetni pogoj. Veljati mora

$$(1-c)^2 + 1 = c^2\,,$$

iz česar sledi enačba $2 - 2c = 0$ *ali* $c = 1$. *Rešitev enačbe je torej*

$$y = \sqrt{2x - x^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Kam bi del začtene pogoje: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Enačba za c: 2 točki.*
- *c: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

2. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti

$$y^{(3)} - y'' + y' - y = x\cos x\,.$$

a. (15) Poiščite partikularno rešitev enačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom je oblike

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1\,.$$

Ničle najprej iščemo med delitelji konstantnega člena in takoj najdemo $\lambda_1 = 1$. *Z deljenjem sledi*

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)\,,$$

torej $\lambda_{2,3} = \pm i$. *V zgornji enačbi desno stran nadomestimo z* xe^{ix}. *Glede na to, da je i ničla karakterističnega polinoma in je x polinom prve stopnje, bo nastavek za rešitev enak* $y_p(x) = x(Ax+B)e^{ix}$. *Z odvajanjem sledi*

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (2Ax+B)e^{ix} + (Ax^2+Bx)ie^{ix}\\
y''(x) &= 2Ae^{ix} + (2Ax+B)ie^{ix} + (2Ax+B)ie^{ix} - (Ax^2+Bx)e^{ix}\\
y^{(3)}(x) &= 2Aixe^{ix} + 2Ae^{ix} + (2Ax+B)e^{ix} + 2Aie^{ix} - (2Ax+B)e^{ix} -\\
&\qquad (2Ax+B)e^{ix} - (Ax^2+Bx)ie^{ix}
\end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in poenostavimo

$$(-2-2\,i)\;e^{i\,x}\;(B + A\;((-1-2\,i)+2\,x)) = xe^{ix}\,.$$

Pokrajšamo e^{ix} *in na levi in desni primerjamo koeficiente pri enakoh potencah* x. *Sledi* $(-2-2i)2A = 1$, *torej*

$$A = -\frac{1}{8} + \frac{i}{8}\,.$$

Za B mora veljati enačba

$$(-2-2i)(B + A(-1-2i)) = 0\,,$$

torej

$$B = -\frac{3}{8} - \frac{i}{8}\,.$$

Partikularna rešitev je realni del nastavka, torej realni del produkta

$$\frac{x}{8}\left((-1+i)x - 3 - i\right)(\cos x + i\sin x)\,,$$

kar je enako

$$\frac{x}{8}\left(-x\cos x - 3\cos x - x\sin x + \sin x + i(x\cos x - \cos x - x\sin x - 3\sin x)\right)\,.$$

Sledi

$$y_p(x) = \frac{x}{8}\left(-x\cos x - 3\cos x - x\sin x + \sin x\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom in ničle: 3 točke.*
- *Nastavek: 3 točke.*
- *Odvajanje in vstavljanje: 3 točke.*
- *Enačbi za A in B: 3 točke.*
- *Partikularna rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe, ki ustreza pogojem $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Rešitev: Splošna oblika rešitve je

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \,,$$

kjer je $y_1 = e^x$, $y_2 = \cos x$ *in* $y_3 = \sin x$. *Z odvajanjem sledi*

$$y_p(0) = 0, \qquad y_p'(0) = -\frac{3}{8} \qquad \textit{in} \qquad y_p''(0) = 0\,.$$

Sledi, da mora veljati

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_1 + c_2 \\ 0 & = & -\frac{3}{8} + c_1 + c_3 \\ 0 & = & c_1 - c_2 \end{array}$$

Iz prve in tretje enačbe sledi $c_1 = c_3 = 0$, *iz druge pa* $c_3 = 3/8$. *Sledi*

$$y = \frac{x}{8}\left(-x\cos x - 3\cos x - x\sin x + \sin x\right) + \frac{3}{8}\sin x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Rešitve homogene enačbe: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

3. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = g(x)$$

na intervalu $[2\pi, \infty)$.

a. (10) Pokažite, da sta funkciji

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad \text{in} \quad y_2(x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

linearno neodvisni rešitvi homogene diferencialne enačbe.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$y_1'(x) = \frac{-\left(-2\,x\,\cos x + \sin x\right)}{2\,x^{\frac{3}{2}}}$$

in

$$y_1''(x) = \frac{3\,\sin x - 4\,x\,\left(\cos x + x\,\sin x\right)}{4\,x^{\frac{5}{2}}}.$$

Podobno dobimo, da je

$$y_2'(x) = \frac{\cos x + 2\,x\,\sin x}{2\,x^{\frac{3}{2}}}$$

in

$$y_2''(x) = \frac{\left(-3 + 4\,x^2\right)\,\cos x - 4\,x\,\sin x}{4\,x^{\frac{5}{2}}}.$$

Preverimo, recimo, da je y_1 rešitev homogene diferencialne enačbe. Vstavimo

$$\begin{aligned} & y_1'' + \frac{1}{x}y_1' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y_1 = \\ = \quad & \frac{3\,\sin x - 4\,x\,\left(\cos x + x\,\sin x\right)}{4\,x^{\frac{5}{2}}} + \frac{\left(2\,x\,\cos x - \sin x\right)}{2\,x^{\frac{5}{2}}} \quad + \\ & \qquad + \quad \frac{(4x^2 - 1)\sin x}{4x^{\frac{5}{2}}} \\ = \quad & \frac{1}{4x^{\frac{5}{2}}}\left(3\sin x - 2\sin x - \sin x - 4x^2\sin x + 4x^2\sin x - 4x\cos x + 4x\cos x\right) \\ = \quad & 0\,. \end{aligned}$$

Podobno preverimo, da je y_2 rešitev. Za dokaz linearne neodvisnosti izračunamo determinanto Wronskega

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{1}{x}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje y_1: 2 točki.*
- *Vstavljanje y_1: 2 točki.*
- *Odvajanje y_2: 2 točki.*
- *Vstavljanje y_2: 2 točki.*
- *Linearna neodvisnost: 2 točki.*

b. (15) Struvejeva funkcija $H_{1/2}(x)$ je definirana kot rešitev enačbe za

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,,$$

ki ustreza pogojema

$$H_{1/2}(2\pi) = 0 \qquad \text{in} \qquad H'_{1/2}(2\pi) = 0\,.$$

Rešitev: Izračunamo

$$y_p(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int^x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos u \, du - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \int^x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin u \, du\,.$$

Vstavimo in dobimo

$$y_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,.$$

Splošna rešitev bo oblike

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} + c_1 \,.\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - c_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,.$$

Vstavimo začetno vrednost in dobimo

$$0 = \frac{1}{\pi} - c_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$

torej $c_2 = \sqrt{2/\pi}$. Iz a. dela naloge preberemo

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} + c_1 \frac{(2\,x\,\cos x - \sin x)}{2\,x^{\frac{3}{2}}} + c_2 \frac{\cos x + 2\,x\,\sin x}{2\,x^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Vstavimo $x = 2\pi$ in dobimo

$$0 = -\frac{1}{4\pi^2} + c_1 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} + c_2 \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}}\,.$$

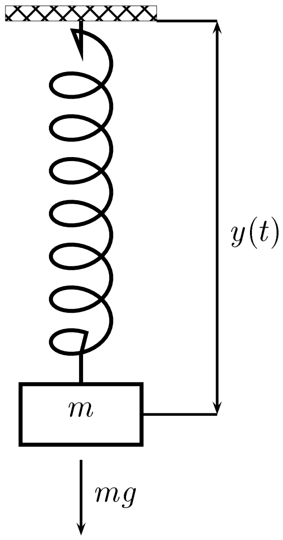
Upoštevamo vrednost c_2 in sledi $c_1 = 0$. Končna rešitev je

$$H_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(1 - \cos x)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Splošna oblika: 2 točki.*
- *c_2: 2 točki.*
- *c_1: 2 točki.*

4. (25) Utež z maso m visi na vzmeti s koeficientom k. V ravnovesni legi je vzmet dolga l. Funkcija $y(t)$ naj opisuje razdaljo težišča uteži od točke, kjer je pritrjena vzmet, kot je prikazano na sliki.



Slika 1 Utež na vzmeti.

Funkcija y ustreza diferencialni enačbi

$$m\ddot{y} = mg + k(l - y)\,.$$

a. (15) Poiščite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Enačbo prepišimo v običajno obliko

$$m\ddot{y} + ky = mg + kl\,,$$

kar je nehomogena linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Linearno neodvisni rešitvi homogenega dela enačbe sta

$$y_1(t) = \cos(\omega t) \qquad in \qquad y_2(t) = \sin(\omega t)\,,$$

kjer je $\omega = \sqrt{k/m}$. Potrebujemo še partikularno rešitev. Ker je desna stran konstanta, bo tudi partikularna rešitev konstanta in dobimo $y_p(t) = g/\omega^2 + l$. Splošna rešitev bo oblike

$$y(t) = \frac{g}{\omega^2} + l + c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\,.$$

Določiti moramo še konstante c_1 in c_2. Iz začetnih pogojev dobimo

$$0 = \frac{g}{\omega^2} + c_1 \qquad in \qquad 0 = c_2\omega\,.$$

Sledi

$$y(t) = l + \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) .$$

Ocenjevanje:

- *Ničli karakterističnega polinoma: 3 točke.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 3 točke.*
- *Partikularna rešitev: 3 točke.*
- *Enačbi za konstante: 3 točke.*
- *Končna rešitev: 3 točke.*

b. (10) Rešite enačbo še pri začetnih pogojih $y(0) = l$ in $\dot{y}(0) = 0$.

Rešitev: Iz a. vemo, da je splošna rešitev enačbe enaka

$$y(t) = \frac{g}{\omega^2} + l + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) .$$

Začetni pogoji pripeljejo do enačb

$$\frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} + c_1 \qquad in \qquad 0 = c_2 \omega .$$

Sledi $c_1 = c_2 = 0$. *Opomba: Rešitev je očitna, ker sta pri danem odmiku sili težnosti in vzmeti uravnovešeni.*

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbi za konstanti: 2 točki.*
- *Rešitev: 6 točk.*