Diferencialne enačbe:

- 1. reda z ločljivima spremenljivkama:

$$y' = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\cdot dx$$

*primer:

$$x = x(t),\ x(0) = 0,\ \alpha < \beta,\ k - konst$$

$$\frac{x'}{(\alpha-x)^2(\beta-x)} = k$$

$$\int \frac{dx}{(\alpha-x)^2(\beta-x)} = \int k\cdot dt \Rightarrow \text{razcep na parcialne}$$

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\int\left(\frac{1}{\beta-x}-\frac{1}{\alpha-x}\right)dx - \frac{1}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{(\alpha-x)^2}$$

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\cdot\log\frac{\beta-x}{\alpha-x} + \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-x)} = k\cdot t + C =$$

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\cdot\log\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{(\alpha-\beta)\alpha} = C; \qquad x(t) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\cdot\log\frac{\frac{\alpha}{2}}{\beta-\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{(\beta-\alpha)\frac{\alpha}{2}} = k\cdot t + \frac{1}{(\alpha-\beta}$$

- nehomogena 1. reda:

gre za dif. enačbo oblike: $y' + f(x)y = g(x)$

najprej nas zanima ,ko je g(x) = 0:

$$y' = -f(x)y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -f(x)$$

$$y_H(x) = C\cdot e^{-\int f(x)dx}$$ -

homogena rešitev

potem, ko g(x) ni enak 0: $y_P(x) = C(x)\cdot y_H(x)$

$$y_P(x) = y_H(x)\cdot\int\frac{g(x)}{y_H(x)}dx$$ - partikularna r.

končna rešitev:

$y(x) = y_P(x) + C\cdot y_H(x)$ - C določ. iz rob.

* primer:

x = x(t), x(0) = 1 $\quad x' + \frac{t}{1-t^2}x = t$

1. rešimo ustrezno homogeno enačbo:

$$x' + \frac{t}{1-t^2}x = 0 \Rightarrow \int\frac{dx}{dx} = -\int\frac{t\cdot dt}{1-t^2} \Rightarrow x_H =$$

2. poiščemo partikularno rešitev:

$$x_P = \sqrt{1-t^2}\cdot C(t) \Rightarrow x' = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot C(t)$$

x_P in x' vstavimo v začetno enačbo in izrazimo C:

$$\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot C(t) + \sqrt{1-t^2}\cdot C'(t) + \frac{t}{1-t^2}\cdot\sqrt{1-t^2}\cdot C(t) = t$$

$$C'(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow C = -\sqrt{1-t^2}$$

$$x_P = \sqrt{1-t^2}\cdot(-\sqrt{1-t^2}) = t^2 - 1$$

3. končna rešitev:

$$x = x_P + x_H = t^2 - 1 + \sqrt{1-t^2}\cdot C$$

iz robnih pogojev: C = 2

$$x = t^2 - 1 + 2\sqrt{1-t^2}$$

- 2. reda s konstantnimi koeficienti:

$$a\cdot y'' + b\cdot y' + c\cdot y = g(x)$$

homogena rešitev → ko je g(x) = 0

$$y(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

i) ko ima 2 rešitvi λ_1 in λ_2 :

$$y = C_1\cdot e^{\lambda_1 x} + C_2\cdot e^{\lambda_2 x}$$

ii) ko ima 1 rešitev $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

$$y = C_1\cdot e^{\lambda x} + C_2\cdot x\cdot e^{\lambda x}$$

iii) ko ima 2 nerealni rešitvi $\lambda_1 = \mu + i\gamma$ in $\lambda_2 = \mu - i\gamma$

$$y = C_1\cdot e^{\mu x}\cos\gamma x + C_2\cdot e^{\mu x}\sin\gamma x$$

partikularna rešitev:

$$y_P(x) = -y_1(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(t)\cdot g(t)}{W(t)} + y_2(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)\cdot g(t)}{W(t)}$$

$$W(x) = y_1(x)\cdot y_2'(x) - y_1'(x)\cdot y_2(x)$$

Dodatki:

- Neodvisne rešitve:

So, če je determinata Wronskega enaka 0

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$\det W = y_1\cdot y_2' - y_2\cdot y_1'$$

So tudi, če deliš y_1 in y_2 med sabo in če dobiš konstanto, sta linearno odvisni.

- Nastavek za homogeno rešitev:

$$y = e^{\lambda\cdot x}$$

Če dobiš več enakih labmd, daj rešitve v obliko:

$$y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = x\cdot e^{\lambda x}\ldots$$

- Nastavki za partikularno rešitev:

a.) če je f(x) polinom:

$y_p = ax^2 + bx + c$, vstavimo v enačbo in dobimo koeficiente iz istih potenc.

b.) če je f(x) = sin(ax) (ali cos(ax)):

$$y_p = a\sin ax + b\cos ax$$

c.) če je f(x) = $e^{\lambda x}$, in je različen od homogenih rešitev:

$$y_p = a\cdot e^{\lambda x}$$

d.) če je f(x) = $e^{\lambda x}$, in je enak kot homogena rešitev:
moramo dati nastavek na naslednjo potenco x pred $e^{\lambda x}$, ki je še prosta.

$$y_p = a \cdot x \cdot e^{\lambda x}$$

e.) Seštevanje polinoma in cos se rešuje tako, da nastavimo:

$$y_p = ax + b + c\cos x + d\sin x$$

f.) Povezava med $e^x \cdot \sin(x)$ rešimo tako, da namesto tega pišemo
$e^{(1+i)x} = e^x \cdot (\cos(x) + i \cdot \sin(x))$
Nato pa iz celotne rešitve vzamemo samo imaginarni del!!! (če bi bil v f(x) cosinu bi vzeli realni del.)

Tako imamo nastavek: $y_p = a \cdot e^{(1+i)x}$

Vedi:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

Če so rešitve karakterističnega polinom λ = i in λ = -i, potem sta rešitvi homogene enačbe $y_1 = \cos(x)$ in $y_2 = \sin(x)$.

Odvodi:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

$$(x^x)' = x^x \cdot \log(x + 1)$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 -$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(arccos
(arctgx)
(arcctgx
(sinh x)
(cosh x)
(tghx)
(ctghx)
(arcsin
(arctgh