FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3
Pisni izpit
10. april 1998

Ime in priimek: ____________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f\colon R^3 \to R$ naj bo dana z

$$f(x,y,z) = yz + \sin(xy) - \cos(xz) - 2\,.$$

a. (10) Dokažite, da v neki okolici U točke $(\pi, 1)$ obstaja funkcija $g\colon U \to R$, taka da je $g(\pi,1) = 1$ in $f(x,y,g(x,y)) = 0$ na U. Izračunajte parcialna odvoda funkcije g v točki $(\pi, 1)$.

Rešitev: Po izreku o implicitni funkciji taka funkcija g obstaja na neki okolici točke $(\pi,1)$, če je $f_z(\pi,1,1) \neq 0$. Zlahka preverimo, da je

$$f_z(x,y,z) = y + x\sin(xz)\,.$$

Vstavimo dano točko in dobimo $f_z(\pi,1,1) = 1$. Parcialna odvoda sta

$$g_x(\pi,1) = -f_x(\pi,1,1) = 1 \quad \text{in} \quad g_y(\pi,1) = -f_y(\pi,1,1) = \pi - 1\,.$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $f(\pi,1,1) = 0$: 2 točki.*
- *Preverjanje $f_z(\pi,1,1) \neq 0$: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Izračun $g_x(\pi,1)$ in $g_x(\pi,1)$: 2+2 točki.*

b. (10) Izračunajte še $g_{xx}(\pi, 1)$.

Rešitev: Identiteto $f(x,y,g(x,y)) = 0$ odvajamo dvakrat po x. Po prvem odvajanju dobimo

$$f_x + f_z \cdot g_x = 0\,.$$

Odvajamo po x še enkrat.

$$f_{xx} + f_{xz}\cdot g_x + (f_{xz} + f_{zz}\cdot g_x)\cdot g_x + f_z \cdot g_{xx} = 0\,.$$

Vstavimo točko $(\pi,1,1)$ in dobimo

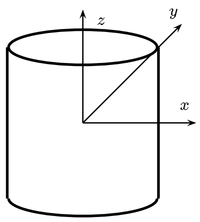
$$-1 - 2\pi g_x(\pi,1) - \pi^2 \cdot g_x^2(\pi,1) + g_{xx}(\pi,1) = 0\,.$$

Sledi $g_{xx}(\pi,1) = 1 + 2\pi + \pi^2$.

Ocenjevanje:

- *Prvo odvajanje identitete: 3 točke.*
- *Drugo odvajanje identitete: 3 točke.*
- *Vstavljanje točk: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Valj postavimo v koordinatni sistem tako, kot kaže spodnja slika. Geometrijsko središče valja je v izhodišču koordinatnega sistema. Višina valja naj bo $2H$ in polmer osnovne ploskve R.



a. (10) Izračunajte masni vrtilni vztrajnostni moment valja I_{xx} okrog osi x za valj s konstantno masno gostoto ρ, torej

$$I_{xx} = \rho \int_V (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Vpeljemo cilindrične koordinate. Integral preide v

$$\begin{aligned}
\rho \int_V (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z &= \rho \int_{-H}^{H} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R (r^2 \sin^2\phi + z^2) r \mathrm{d}r \\
&= \rho \int_{-H}^{H} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} (\frac{R^4}{4}\sin^2\phi + \frac{R^2 z^2}{2}) \mathrm{d}\phi \\
&= \rho \int_{-H}^{H} (\frac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 z^2)\,\mathrm{d}z \\
&= \rho(\frac{2\pi R^4 H}{4} + \frac{2\pi R^2 H^3}{3}) \\
&= \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{3}
\end{aligned}$$

Tukaj je m masa valja.

Ocenjevanje:

- *Uvedba cilindričnih koordinat: 2 točki.*
- *Preobrazba območja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_V \frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Utemeljite, da je integral dobro definiran.

Rešitev: Spet uvedemo cilindrične koordinate. Integriramo ne-negativno funkcijo, zato bo integral dobro definiran, če obstaja.

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{-H}^{H}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^R \frac{r^2\cos^2\phi+z^2}{r} r\mathrm{d}r \\
&= \int_{-H}^{H}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}(\frac{R^3}{3}\cos^2\phi+Rz^2)\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-H}^{H}(\frac{\pi R^3}{3}+2\pi Rz^2)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{2\pi R^3 H}{3}+\frac{4\pi RH^3}{3}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Uvedba cilindričnih koordinat: 2 točki.*
- *Preobrazba območja: 2 točki.*
- *Jacobian in Fubini: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da je integral dobro definiran: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$.

a. (10) Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi površino valja, danega z $V = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \le a^2, 0 \le z \le b\}$.

Rešitev: Najprej izračunamo divergenco vektorskega polja.

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = x^2 \cdot (3+1+1) = 5x^2 \,.$$

Uporabimo Gaussov izrek in v trojni integral uvedemo cilindrične koordinate. Dobimo

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}\ \mathrm{d}\mathbf{S} = 5\int_0^b \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\ \mathrm{d}\phi \int_0^a r^3 \mathrm{d}r = \frac{5\pi a^4 b}{4}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izračun divergence: 2 točki.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Uvedba cilindričnih koordinat: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še pretok $\mathbf{F}$ skozi zgornjo polovico površine krogle s polmerom R in izhodiščem v središču. Zgornja polovica je tista, za katero je $z \ge 0$.

Rešitev: Možnosti je več. Ena je ta, da opazimo, da je pretok skozi poljuben del ravnine xy enak nič, ker je polje na tej ravnini vzporedno z njo. Pretok skozi zgornji del krogle torej lahko spet izračunamo po Gaussovem izreku, ker je enak integralu divergence po zgornji polovici krogle. Uvedemo še krogelne koordinate in dobimo

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}\ \mathrm{d}\mathbf{S} = 5\int_0^{2\pi} \cos^2\phi\ \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta \int_0^R r^4 \mathrm{d}r = \frac{2\pi R^5}{3}\,.$$

Upoštevali smo, da je $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta = \int_0^1 (1-u^2)\ \mathrm{d}u = 2/3$, *kar sledi iz vpeljave nove spremenljivke* $\cos\theta = u$.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je pretok skozi xy-ravnini enak 0: 4 točke.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Uvedba krogelnih koordinat: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ena od Maxwellovih enačb pravi, da sta magnetno polje $\mathbf{B}$ in polje tokov v prostoru $\mathbf{J}$ povezana z enačbo $\mathbf{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{J}$, kjer je μ_0 permeabilnost prostora. Naj bo $\mathbf{B} = (2x^2y + 2z^2y, -2xy^2 - 2xz^2, 0)$.

a. (10) Naj bo $\mathcal{S}$ površina zgornjega dela krogle (brez dela v xy-ravnini) s polmerom R in središčem v izhodišču. Za normalo izberite $\mathbf{r}/r$. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{J}\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Rešitev: Uporabimo Stokesov izrek

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \mathbf{J}\, \mathrm{d}\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0}\int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{B})\, \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{\mu_0}\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,.\end{aligned}$$

Krožnico $\partial\mathcal{S}$ parametriziramo kot $x(t) = R\cos t$ in $y(t) = R\sin t$ za $0 \le t \le 2\pi$. Krivuljni integral lahko prepišamo v

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{r} = -4R^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, \mathrm{d}t = -R^4\pi\,.$$

Ocenjevanje:

- *Citiranje Stokesovega izreka: 2 točki.*
- *Prevedba na krivuljni integral: 4 točke.*
- *Izračun krivuljnega integrala: 4 točke.*

b. (10) Pokažite, da je $\mathrm{div}(\mathbf{J}) = 0$.

Rešitev: Divergenca rotorja je vedno enaka 0.

Ocenjevanje:

- *Izračun* $\mathbf{J}$*: 4 točke.*
- *Izračun* $\mathrm{div}(\mathbf{J})$*: 6 točk.*
- *Opomba: Citiranje, da je divergenca rotorja vedno enak 0: 10 točk.*

5. (20) Funkcija $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ naj bo definirana z

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{za } 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{za } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{za } x = 0, \pi, -\pi. \end{cases}$$

a. (10) Dokažite, da je za $0 < x < \pi$

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}.$$

Utemeljite, zakaj Fourierova vrsta za $0 < x < \pi$ konvergira proti $\cos x$.

Rešitev: Funkcija le liha, zato je $a_n = 0$ za vse $n \geq 0$. Izračunajmo najprej

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin x \,\mathrm{d}x = 0\,,$$

kot se brž prepričamo s substitucijo $2x = u$. Za $n > 0$ zapišemo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)}{2} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-(-1)^{n+1} + 1}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Brž se prepričamo, da za lihe n dobimo $b_n = 0$, za sode pa $b_n = (1/\pi) 4n/(n^2 - 1)$. Če sode n zapišemo kot $2k$ in seštevamo po k dobimo točno zgornji rezultat. Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki, ker je $f(x)$ odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva in velja povsod $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je funkcija liha: 2 točki.*
- *Izračun b_0: 2 točki.*
- *Izračun b_n: 4 točke.*

- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Uporabite a. za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{4(2n+1)^2-1}\,.$$

Rešitev: V zgornjo vrsto vstavimo $x = \pi/4$. *Ostanejo samo lihi členi, ker je* $\sin(k\pi) = 0$ *za vsak* k. *V Fourierovi vrsti za* $f(x)$ *na levi dobimo* $f(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, *na desni pa iskano vrsto pomnoženo z* $8/\pi$. *Rezultat je* $\pi\sqrt{2}/16$.

Ocenjevanje:

- $x = \pi/4$: *4 točke.*
- *Samo lihi členi so različni od 0: 2 točki.*
- *Vsota neskončne vrste: 4 točke.*

6. (20) Dana naj bo nehomogena linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti

$$y'' - 3y' + 2y = f(x)\,.$$

a. (10) Naj bo $f(x) = e^x$. Poiščite rešitev enačbe pri začetnih pogojih $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Karakteristični polinom $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ *ima ničli* $\lambda = 1$ *in* $\lambda = 2$. *Rešitvi homogene enačbe sta* e^x *in* e^{2x}. *Partikularno rešitev iščemo z nastavkom* axe^x. *Nastavek vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo*

$$a(2e^x + xe^x - 3e^x - 3xe^x + 2xe^x) = -ae^x = e^x\,.$$

Iz tega razberemo $a = -1$. *Splošna rešitev nehomogene enačbe je*

$$y(x) = -xe^x + c_1e^x + c_2e^{2x}\,.$$

Začetnim pogojem bo zadoščeno, če bo

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) &= c_1 + 2c_2 = 1\,, \end{aligned}$$

torej $c_1 = -1$ *in* $c_2 = 1$.

Ocenjevanje:

- *Rešitvi homogene enačbe: 3 točke.*
- *Nastavek za nehomogeno enačbo: 3 točke.*
- *Rešitev, ki ustreza robnim pogojem: 4 točke.*

b. (10) Naj bo $f(x) = e^x\cos(x)$. Poiščite rešitev enačbe pri začetnih pogojih $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Enačbo rešujemo v kompleksni obliki. Partikularna rešitev bo realni del rešitve enačbe

$$y'' - 3y' + 2y = e^x(\cos x + i\sin x) = e^{(1+i)x}\,.$$

Kompleksno število $\mu = 1 + i$ *ni koren karakterističnega polinoma, zato rešitev iščemo z nastavkom* $Ae^{\mu x}$. *Vstavimo v enačbo in dobimo po krajšanju z* $e^{\mu x}$

$$A(1+i)^2 - 3A(1+i) + 2A = A(1 + 2i - 1 - 3 - 3i + 2) = A(-1-i) = 1\,.$$

Sledi $A = (-1+i)/2$. *Realni del* $(-1+i)e^{(1+i)x}/2$ *je* $(-e^x\cos x - e^x\sin x)/2$. *Splošna rešitev bo oblike*

$$y(x) = (-e^x\cos x - e^x\sin x)/2 + c_1e^x + c_2e^{2x}\,.$$

Začetnima pogojema bo zadoščeno, če bo

$$\begin{aligned} -1 + c_1 + c_2 &= 0 \\ -2 + c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Iz tega izračunamo $c_1 = 0$ *in* $c_2 = 1$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek za nehomogeno enačbo: 4 točke.*
- *Izračun potrebne konstante A: 3 točke.*
- *Rešitev, ki ustreza začetnim pogojem: 4 točke.*

7. (20) Delec se giblje v ravnini xy s hitrostjo $\mathbf{v}$. Označimo z v_1 in v_2 koordinati $\mathbf{v}$ v času t. Gibanje delca opisuje sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -bv_2 \\ \dot{v}_2 &= bv_1 \,. \end{aligned}$$

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko rešitev zgornjega sistema.

Rešitev: Matrika za ta sistem diferencialnih enačb je

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom te matrike je $P(\lambda) = \lambda^2 + b^2$ *z lastnima vrednostima* bi *in* $-bi$. *Pripadajoča lastna vektorja sta*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dve linearno neodvisni rešitvi dobimo tako, da vzamemo realni in imaginarni del $e^{ibt}\mathbf{x}_1$. *Dobimo*

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin bt \\ \cos bt \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix}.$$

Stolpca fundamentalne matrike bosta linearni kombinaciji $\mathbf{y}_1$ *in* $\mathbf{y}_2$, *ki bosta ustrezali začetnima pogojema* $\mathbf{e}_1$ *ali* $\mathbf{e}_2$. *Konstante zlahka poiščemo in dobimo fundamentalno matriko kot*

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Lastne vrednosti: 2 točki.*
- *Lastna vektorja: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Nastavek za iskanje stolpcev fundamentalne matrike: 2 točki.*
- *Fundamentalna matrika: 2 točki.*

b. (10) Določite položaj delca v času t, če je delec v času $t = 0$ v izhodišču in je $v_1(0) = 1$ ter $v_2(0) = 1$.

Rešitev: Rešitev pri danih začetnih pogojih dobimo kot

$$v(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos bt - \sin bt \\ \cos bt + \sin bt \end{pmatrix}.$$

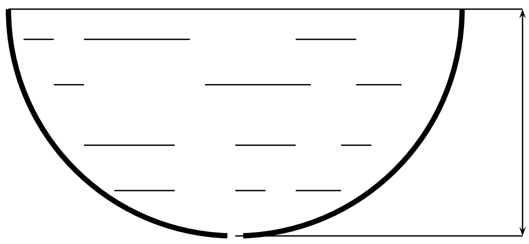
Položaj delca v času t dobimo z integracijo hitrosti.

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{v}(s)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} \sin bt + \cos bt - 1 \\ \sin bt - \cos bt + 1 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Rešitev pri danih začetnih pogojih: 4 točke.*
- *Ugotovitev, da je potrebno integrirati: 2 točki.*
- *Rezultat: 4 točke.*

8. (20) Iz polkrožne posode s polmerom R, ki je napolnjena do roba, na dnu izteka tekočina skozi odprtino s presekom D. Z $h(t)$ označimo višino gladine vode kot na spodnji sliki.



Po Toricellijevem zakonu [1] ustreza višina vode kot funkcija časa diferencialni enačbi

$$-h'S(h) = \mu D\sqrt{2gh}\,,$$

kjer je $S(h)$ površina gladine, ko je njena višina enaka h. V našem primeru je $S(h) = \pi h(2R - h)$.

a. (10) Pokažite, da rešitev h zgornje diferencialne enačbe pri začetnem pogoju $h(0) = R$ ustreza enačbi

$$(2R)\frac{2h^{3/2}}{3} - \frac{2h^{5/2}}{5} = -at + R^{5/2} \cdot 14/15,$$

kjer je $a = \mu D\sqrt{2g}/\pi$.

Rešitev: Enačbo prepišemo v obliko primerno za integracijo.

$$h'\sqrt{h}(2R - h) = -\frac{\mu D\sqrt{2g}}{\pi}\,.$$

Integriramo obe strani in dobimo

$$(2R)\frac{2h^{3/2}}{3} - \frac{2h^{5/2}}{5} = -at + c,$$

kjer je z a označena konstanta na desni. Iz začetnega pogoja sledi, če vstavimo $t = 0$ *in* $h(0) = R$*, da je*

$$R^{5/2}(4/3 - 2/5) = c$$

ali $c = R^{5/2} \cdot 14/15$.

Ocenjevanje:

[1] Evangelista Torricelli (1608-1647), italijanski fizik in matematik

- *Prepis v obliko primerno za integriranje: 3 točke.*
- *Integriranje leve strani: 3 točke.*
- *Integriranje desne strani: 3 točke.*
- *Nastavek za konstanto: 3 točke.*
- *Rešitev: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte čas do trenutnka, ko bo iz posode iztekla vsa voda.

Rešitev: Zanima nas čas, ko bo $h(t) = 0$. *Vstavimo v enačbo v a. in dobimo*

$$0 = -at + R^{5/2} \cdot 14/15\,.$$

Sledi

$$t = \frac{14R^{5/2}}{15a}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja za uporabo točke a.: 5 točk.*
- *Enačba za t: 3 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*