FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

23. april 2010

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $u\colon G \to \mathbb{R}$ naj bo na $G = \{(x,y)\colon x \neq 0\}$ definirana s predpisom

$$u(x,y) = \phi(\frac{y}{x}) + x \cdot \psi(\frac{y}{x})\,,$$

kjer sta $\phi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji.

a. (10) Preverite, da na G velja

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0\,.$$

b. (10) Definirajte funkcijo $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$g(v,w) = (e^{v+w}, e^{v-w})$$

in naj bo $\phi(t) = t^{-1}$ in $\psi(t) = t$. Izračunajte gradient sestavljene funkcije

$$F(v,w) = u(g(v,w))$$

ne da bi jo eksplicitno izračunali.

2. (20) Naj bodo a, b, c in d pozitivna števila, za katere velja $a+b+c+d=1$. Na območju $\Delta = \{(x,y,z)\colon x>0, y>0, z>0, x+y+z<1\}$ naj bo dana funkcija

$$f(x,y,z) = a\log x + b\log y + c\log z + d\log(1-x-y-z)\,.$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije f na Δ in jih klasificirajte.

b. (10) Naj bo $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$ dana z

$$g(x,y,z) = \log x - \log y + \log z - \log(1-x-y-z)\,.$$

Pokažite, da je v točki (x,y,z), kjer je

$$x=(a+b)(a+d)\,,\quad y=(a+b)(b+c) \quad \text{in} \quad z=(b+c)(c+d)\,.$$

lahko ekstrem funkcije $f(x,y,z)$ pri pogoju $g(x,y,z)=0$.

Namig: Preverite, da je $1-x-y-z=(a+d)(c+d)$.

3. (20) Integrali.

a. (10) Naj bo $H = \{(u,v)\colon 0 \le u \le a, -u \le v \le u\}$. Izračunajte

$$\int_H e^{-u} \sqrt{\frac{2}{u+v}}\,\sqrt{\frac{2}{u-v}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

b. (10) Naj bo $H = \{(u,v)\colon 0 \le u \le \infty, -u \le v \le u\}$. Izračunajte

$$\int_H e^{-u} \sqrt{\frac{2}{u+v}}\,\sqrt{\frac{2}{u-v}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

4. (20) Ploskev naj bo dana parametrično z

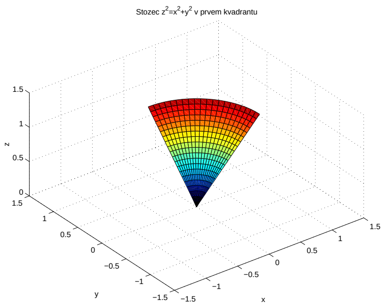
$$\Phi(u,v) = \left(a\sqrt{1+v^2}\cos u,\ a\sqrt{1+v^2}\sin u,\ v \right)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $-1 \le v \le 1$.

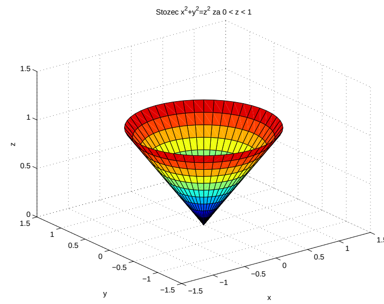
a. (10) Poiščite vektor $\mathbf{n}$, ki je pravokoten na ploskev v točki $(\sqrt{2}a, 0, 1)$.

b. (10) Naj bo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev v smeri normale z negativno z-komponento za $z > 0$.

5. (20) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 0, y)$.



Sl. 1a Ploskev $\mathcal{S}_1$.



Sl. 1b Ploskev $\mathcal{S}_2$.

a. (10) Ploskev $\mathcal{S}_1$ naj bo dana kot $x^2 + y^2 = z^2$ za $x \geq 0, y \geq 0$ in $0 \leq z \leq 1$ kot na sliki 1a. Krivulja $\partial\mathcal{S}_1$ naj bo pozitivno orientirana, če gledamo iz točke (0,0,1). Izračunajte

$$\int_{\partial\mathcal{S}_1} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

b. (10) Naj bo $\mathcal{S}_2$ ploskev dana kot plašč stožca $x^2 + y^2 = z^2$ za $0 \leq z \leq 1$ kot na sliki 1b. Za normalo na ploskev izberite vedno tisto s pozitivno z-komponento. Označite $\mathbf{G}(x, y, z) = (y, -x, 0)$. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Namig: Preberite Stokesov izrek v smeri od ploskovnega proti krivuljnemu integralu. Kakšno je polje $\mathbf{G}$ *na robu ploskve* $\mathcal{S}_2$*?*