FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

18. april 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija ene spremenljivke. Za $x \neq y$ definiramo

$$F(x,y) = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right).$$

a. (10) Izračunajte

$$x\,\frac{\partial F}{\partial x} + y\,\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Rešitev: Označimo

$$u(x,y) = \frac{x+y}{x-y}.$$

Po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \qquad in \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = f' \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ugotovimo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2y}{(x-y)^2} \qquad in \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

Računamo

$$x\,\frac{\partial F}{\partial x} + y\,\frac{\partial F}{\partial y} = f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \frac{(-2y)x + y(2x)}{(x-y)^2} = 0.$$

Ocenjevanje:

- *Formula za odvajanje: 2 točki.*
- *Konkretni parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Formula za odvajanje: 2 točki.*
- *Konkretni parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Seštevanje, izpostavljanje in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izrazite

$$x\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

z x, y in f''.

Rešitev: Označimo kot prej

$$u(x,y) = \frac{x+y}{x-y}.$$

Po pravilih za odvajanje sestavljenih funkcij je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f' \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Sledi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f'' \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + f' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in podobno

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f'' \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + f' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,.$$

Izračunamo še

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{4y}{(x-y)^3} \qquad in \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x-y)^3}\,.$$

Ugotovimo

$$x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = -\frac{4xy}{(x-y)^3} \qquad in \qquad x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Sledi

$$x\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{4xy}{(x-y)^3}\, f''\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Formula za drugi parcialni podvod: 2 točki.*
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$*: 2 točki.*
- $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$*: 2 točki.*
- *Vstavljanje in poenostavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Naj bo $a > 0$ dano število.

a. (10) Poiščite možne ekstreme funkcije

$$f(x,y,z) = \log(a-x) + \log(a-y) + \log(a-z)$$

pri pogoju

$$g(x,y,z) = x + y + z - 2a = 0\,.$$

Rešitev: Po Lagrangeu sestavimo funkcijo

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

in njene parcialne dovode izenačimo z 0. *Dobimo enačbe*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\frac{1}{a-x} - \lambda &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{1}{a-y} - \lambda &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= -\frac{1}{a-z} - \lambda &= 0\,. \end{aligned}$$

Iz enačb sledi, da je $x = y = z$. Iz pogoja sklepamo, da je $x = y = z = 2a/3$.

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Parcialni podvodi: 2 točki.*
- *Opažanje, da je $x = y = z$: 2 točki.*
- *Vstavljanje v pogoj: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

b. (10) Na področju $\Delta = \{(x,y)\colon 0 < x, y < a, x + y > a\}$ naj bo funkcija $f(x,y)$ dana z

$$f(x,y) = \log(a-x) + \log(a-y) + \log(x+y-a)\,.$$

Poiščite stacionarne točke funkcije na Δ in ugotovite ali so lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.

Rešitev: Parcialna dovoda funkcije $f(x,y)$ izenačimo z 0. *Dobimo enačbi*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x+y-a} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{a-y} + \frac{1}{x+y-a} &= 0\,. \end{aligned}$$

Enačbi odštejemo in dobimo

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-y}\,.$$

Sledi $x = y$. Iz prve enačbe sledi

$$a - x = 2x - a\,,$$

torej $x = y = 2a/3$. *Za Hessovo matriko dobimo*

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y-a)^2} - \frac{1}{(a-x)^2} & -\frac{1}{(-a+x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y-a)^2} & -\frac{1}{(x+y-a)^2} - \frac{1}{(a-y)^2} \end{pmatrix}.$$

Vstavimo $x = y = 2a/3$ *in dobimo*

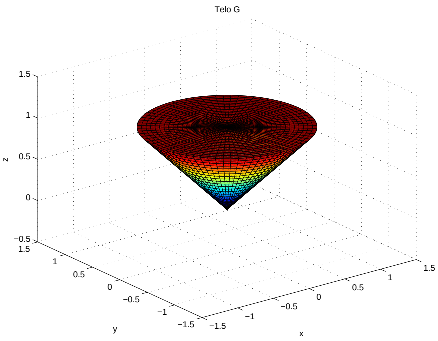
$$Hf\left(2a/3, 2a/3\right) = \begin{pmatrix} -18/a^2 & -9/a^2 \\ -9/a^2 & -18/a^2 \end{pmatrix}.$$

Matrika je negativno definitna, zato je stacionarna točka lokalni maksimum.

Ocenjevanje:

- *Parcialna odvoda: 2 točki.*
- *Stacionarna točka: 2 točki.*
- *Drugi odvodi: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Negativna definitnost in sklep: 2 točki.*

3. (20) Naj bo $G = \{(x, y, z) \colon 0 \le z \le h, \sqrt{x^2 + y^2} \le z\}$ na glavo postavljen stožec z vrhom v izhodišču, ki ima za os kar os z in višino h. Telo G je na sliki 1.



Sl. 1 Telo G.

a. (10) Izračunajte

$$\int_G z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate. Telo G v cilindričnih koordinatah opišemo z

$$G = \{(r, \phi, z) \colon 0 \le z \le h, r \le z, 0 \le \phi \le 2\pi\} \, .$$

Računamo

$$\begin{aligned} \int_G z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^h z \mathrm{d}z \int_0^z r \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^h \frac{z^3}{2} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi h^4}{4} \, . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte masni vztrajnostni moment telesa G okrog osi z, če predpostavite, da je gostota konstantno enaka ρ, torej

$$I_{zz} = \rho \int_G (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \rho \int_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^z r^3\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\rho \int_0^h \frac{z^4}{4}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi\rho h^5}{10}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana z

$$\Phi(u,v) = (u, \cos u \cos v - \sin u \sin v, \sin u \cos v + \cos u \sin v)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $0 \le v \le 2\pi$.

a. (10) Poiščite normalo na ploskev v točki $T(\pi, 1, 0)$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = (1, -\sin u \cos v - \cos u \sin v, \cos u \cos v - \sin u \sin v)$$

in

$$\Phi_v = (0, -\cos u \sin v - \sin u \cos v, -\sin u \sin v + \cos u \cos v)\ .$$

Najteže je izračunati prvo komponento vektorskega produkta $\Phi_u \times \Phi_v$. *Izpostavimo lahko* $\cos u \cos v - \sin u \sin v$. *Dobimo*

$$(\cos u \cos v - \sin u \sin v)(-\sin u \cos v - \cos u \sin v + \cos u \sin v + \sin u \cos v) = 0\,.$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = (0, -\cos u \cos v + \sin u \sin v, -\cos u \sin v - \sin u \cos v)\,.$$

Točka (u,v)*, ki se preslika v* T*, je* (π,π)*. Sledi*

$$\mathbf{n} = (0, -1, 0).$$

Ocenjevanje:

- Φ_u: *2 točki.*
- Φ_v: *2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*
- (u,v): *2 točki.*
- *Vstavljanje in normala: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok tega vektorksge polja skozi ploskev $\mathcal{S}$.

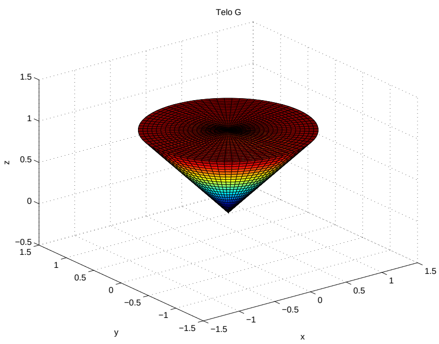
Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \\ &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot(\Phi_u \times \Phi_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= 4\pi^2\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Množenje: 2 točki.*
- *Poenostavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bo $G = \{(x,y,z)\colon 0 \le z \le h, \sqrt{x^2+y^2} \le z\}$ na glavo postavljen stožec z vrhom v izhodišču, ki ima za os kar os z in višino h. Telo G je na sliki 2.



Sl. 2 Telo G.

a. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, -\sqrt{x^2+y^2})$. Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi tisti del površine telesa G, ki sovpada s plaščem stožca. Za normalo vedno izberite vektorje, ki kažejo iz telesa.

Rešitev: Plašč stožca "zapremo" z osnovno ploskvijo. Opazimo $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 2$. *Po Gaussovem izreku je pretok skozi celotno površino telesa G enak*

$$\int_{\partial G} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_G \mathrm{div}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

Ker je divergenca polja konstantna, je

$$\int_G \mathrm{div}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \frac{2\pi h^3}{3}\,.$$

Odšteti moramo še pretok skozi osnovno ploskev. Označimo krog s K. Pretok skozi krog je

$$-\int_K \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Uvedemo polarne koordinate in računamo

$$\begin{aligned} -\int_K \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^h r \cdot r\, \mathrm{d}r \\ &= -2\pi \cdot \frac{h^3}{3} \\ &= -\frac{2\pi h^3}{3}\,. \end{aligned}$$

Iskani pretok je $4\pi h^3/3$.

Ocenjevanje:

- *Zapiranje ploskve: 2 točki.*

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Pretok skozi dodano ploskev: 2 točki.*
- *Integriranje in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (xz, yz, z^2)$. Izračunajte pretok skozi tisti del površine G, ki sovpada s plaščem stožca. Za normalo izberite vektorje, ki kažejo iz telesa G.

Rešitev: Opazimo $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 4z$. *Plašč stožca "zapremo" z osnovno ploskvijo. Pretok skozi celotno površini G dobimo po Gaussu kot*

$$\int_{\partial G} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_G \operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Vemo, da je ta integral enak πh^2. Ker je na osnovni ploskvi $\mathbf{n} = (0,0,1)$ *in je tam $z = h$, je pretok skozi dodano ploskev enak πh^4. Iskani pretok je enak* 0.

Opomba: Nalogo lahko rešimo tudi tako, da opazimo, da je polje vzporedno plašču stožca.

Ocenjevanje:

- *Zapiranje ploskve: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Pretok skozi dodano ploskev: 2 točki.*
- *Integriranje in rezultat: 2 točki.*