FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

10. april 2013

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo $f(u)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija in definirajmo za $xy \neq 0$

$$F(x,y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

a. (10) Izračunajte

$$x^2\frac{\partial F}{\partial x} - y^2\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Rešitev: Računamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Zaradi simetrije je

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right).$$

Vstavimo in sledi

$$x^2\frac{\partial F}{\partial x} - y^2\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2y - xy^2)f\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo: 2 točki.*
- *Pravilo za odvajanje produkta: 2 točki.*
- *F_x: 2 točki.*
- *F_y: 2 točki.*
- *Izraz: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$(x+y)\frac{\partial F}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}.$$

Rešitev: Računamo z oznako

$$u(x,y) = \frac{x+y}{xy}.$$

Dobimo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = yf'(u)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{y}{x^2}f'(u) - \frac{y}{x}f''(u)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = f(u) + yf'(u)\left(-\frac{1}{y^2}\right) - \frac{1}{x}f'(u) - \frac{y}{x}f''(u)\left(-\frac{1}{y^2}\right).$$

Vstavimo in sledi

$$
\begin{aligned}
&(x+y)\frac{\partial F}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \\
&= \quad (-y^2 + y(x+y))f(u) + \left(-\frac{(x+y)y}{x} - y^2\left(-\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right) f'(u) + \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right) f''(u) \\
&= \quad 0\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo: 2 točki.*
- F_{xx}*: 2 točki.*
- F_{xy}*: 2 točki.,*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Naj bo funkcija $f(x,y)$ definirana na $G = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1\}$ in dana s predpisom

$$f(x,y) = -x - \sqrt{1-x^2-y^2}\,.$$

a. (10) Poiščite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y)$ in izračunajte Hessejevo matriko.

Rešitev: Parcialno odvajamo in odvode izenačimo z 0.

$$f_x = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0$$

in

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0\,.$$

Sledi $y=0$ *in* $x = \sqrt{2}/2$. *Izračunamo še Hessejevo matriko. Dobimo*

$$Ht(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1-y^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & \frac{xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \\ \frac{xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & \frac{1-x^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- f_x, f_y*: 2 točki.*
- *Točka: 2 točki.*
- f_{xx}*: 2 točki.*
- f_{xy}*: 2 točki* f_{xy}*: 2 točki.*
- f_{yy}*: 2 točki.*

b. (10) Ugotovite ali so stacionarne točke lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.

Rešitev: Vstavimo stacionarno točko v Hessejevo martiko. Dobimo

$$Hf(\sqrt{2}/2, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Matrika je pozitivno definitna, zato je točka lokalni minimum.

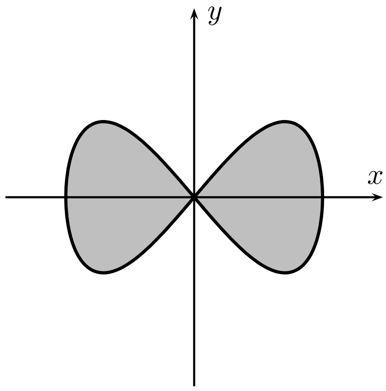
Ocenjevanje:

- *Vstavljanje: 2 toči.*
- *Vstavljanje: 2 toči.*
- *Vstavljanje: 2 toči.*
- *Vstavljanje: 2 toči.*
- *Hessejva matrika: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

3. (20) Lemniskata je dana z enačbo

$$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0.$$

Krivulja je na spodnji sliki.



Sl. 1 Lemniskata v ravnini.

a. (10) Naj bo G osenčeno območje na zgornji sliki. Z uporabo polarnih koordinat izračunajte

$$\int_G \left(1-x^2-y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Kot znano vzemite, da je

$$\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)\,.$$

Rešitev: Zaradi simetrije je dovolj izračunati integral po desnem "ušesu" lemniskate. V polarnih koordinatah je področje oblike

$$H=\{(r,\phi)\colon -\pi/4\le\phi\le\pi/4, 0\le r\le\sqrt{\cos 2\phi}\}\,.$$

To dobimo z vstavljanjem $x=r\cos\phi$ in $y=r\sin\phi$ v enačbo za lemniskato. Dvojni integral preide v

$$\begin{aligned}
\int_G \left(1-x^2-y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 2\int_H (1-r^2)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
&= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}\phi\int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} r\,(1-r^2)\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}\phi\,\left((1-\cos 2\phi)^2-1\right) \\
&= -2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^4\phi\,\mathrm{d}\phi+\frac{\pi}{4} \\
&= 1-\frac{\pi}{8}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Koti: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še

$$\int_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,.$$

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate in dobimo podobno kot v a.

$$\begin{aligned}
\int_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= 2\int_H \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
&= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}} \\
&= 4\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\phi\,(1-\sqrt{1-\cos 2\phi}) \\
&= \pi - 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi \\
&= \pi - 4\sqrt{2} + 4
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Koti: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično z

$$\Phi(u,v) = \big(\sin 2v \cos u, \sin 2v \sin u, 2\cos^2 v\big)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $0 \le v \le \pi/2$.

a. (10) Izračunajte enotski normalni vektor na ploskev $\mathcal{S}$ v točki $T(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = (-\sin 2v \sin u, \sin 2v \cos u, 0)$$

in

$$\Phi_v = (2\cos 2v \cos u, 2\cos 2v \sin u, -4\cos v \sin v)\ .$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = (-4\sin 2v \cos v \sin v \cos u, -4\sin 2v \cos v \sin v \sin u, -2\cos 2v \sin 2v)\ .$$

Razberemo, da je

$$\Phi\left(\pi/4, \pi/4\right) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)\,.$$

Vstavimo in dobimo

$$\Phi_u \times \Phi_v = \left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0\right)\ .$$

Ker je ta vektor enotski, je že iskani vektor.

Ocenjevanje:

- Φ_u*: 2 točki.*
- Φ_v*: 2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*
- *Točka: 2 točki.*
- $\mathbf{n}$*: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $F = (x, y, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$. Upoštevajte

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 2v \,\mathrm{d}v = \frac{2}{3} \qquad \text{in} \qquad \int_0^{\pi/2} \sin 2v \cos 2v \cos^2 v \,\mathrm{d}v = \frac{1}{6}\,.$$

Rešitev: Produkt $\Phi_u \times \Phi_v$ poenostavimo v

$$\Phi_u \times \Phi_v = -2\sin 2v\ (\sin 2v \cos u, \sin 2v \sin u, \cos 2v)\ .$$

Sledi

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -2\sin 2v(\sin^2 2v + 2\cos^2 v \cos 2v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Integriramo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} \big(-2\sin 2v(\sin^2 2v + 2\cos^2 v \cos 2v\big)\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= -4\pi \int_0^{\pi/2} \big(\sin^3 2v + 2\sin 2v \cos 2v \cos^2 v\big)\ \mathrm{d}v \\
&= -4\pi \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{6}\right) \\
&= -4\pi\,.
\end{aligned}$$

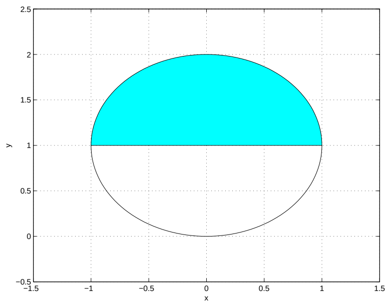
Ocenjevanje:

- $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$: *2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bo G zgornja polovica krogle s polmerom R in središčem v točki $(0, 0, R)$, torej

$$G = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2, z \geq R\}\,.$$

Telo je na sliki 2.



Sl. 2 Del krogle za $z \geq R$.

a. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok vektorkega polja $\mathbf{F}$ skozi ukrivljen del površine telesa G. Za normalo izberite vektorje s pozitivno z-komponento.

Rešitev: Opazimo, da je $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3$. *Po Gaussovem izreku je pretok skozi celotno površi no telesa* $3 \cdot V$, *kjer je* V *prostornina. Torej je pretok enak* $3 \cdot 2\pi R^3/3 = 2\pi R^3$. *Normala na ravno ploskev je* $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$. *Ker je* z*-komponenta polja* $\mathbf{F}$ *na ploskvi konstantno* R, *je pretok enak* $R \cdot P$, *kjer je* P *ploščina kroga. Sledi, da je pretok enak* πR^3. *Ta pretok moramo odšteti in je iskani pretok enak* πR^3.

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Dodana ploskev: 2 točki.*
- *Pretok skozi dodano ploskev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (y - z + 1, z - 1 - x, x - y)$. Izračunajte pretok polja skozi ravni del površine telesa G, torej krog s polmerom R, ki je vzporeden xy-ravnini in ima središče v točki $(0, 0, R)$.

Rešitev: Opazimo, da je $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$. *Opazimo tudi, da na ukrivljenem delu površine telesa* G *velja* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$. *Iskani pretok je enak* 0.

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Dodana ploskev: 2 točki.*
- *Pretok skozi dodano ploskev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*