FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

30. avgust 2013

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bosta $f(u)$ in $g(v)$ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji.

a. (10) Definiramo

$$F(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)\,.$$

Izračunajte

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y)\,.$$

S ponovnim odvajanjem sledi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)\,.$$

Podobno dobimo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y)\,.$$

S seštevanjem ugotovimo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prva parcialna odvoda: 2 točki.*
- F_{xx}*: 2 točki.*
- F_{xy}*: 2 točki.*
- F_{yy}*: 2 točki.*
- *Seštevanje in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Definirajte

$$G(x,y) = \frac{1}{y}\left(f(x+y) + g(x-y)\right)\,.$$

Izračunajte

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{2}{y}\cdot\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{y}\left(f'(x+y) + g'(x-y)\right)$$

in

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{y}\left(f''(x+y) + g''(x-y)\right) .$$

Računamo

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\left(f(x+y) + g(x-y)\right) + \frac{1}{y}\left(f'(x+y) - g'(x-y)\right)$$

in

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= \frac{2}{y^3}\left(f(x+y) + g(x-y)\right) - \frac{2}{y^2}\left(f'(x+y) - g'(x-y)\right) + \\ &\quad + \frac{1}{y}\left(f''(x+y) + g''(x-y)\right) .\end{aligned}$$

S seštevanjem členov sledi

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{2}{y} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0 .$$

Ocenjevanje:

- f_x: 2 točki.
- F_{xx}: 2 točki.
- F_y: 2 točki.
- F_{yy}: 2 točki.
- Rezultat: 2 točki.

2. (20) Naj bo funkcija $g(x, y)$ dana z

$$g(x, y) = x^2 y\,.$$

a. (10) Naj bo funkcija $f(x, y)$ dana z

$$f(x, y) = x^2 + xy\,.$$

Poiščite možne ekstreme funkcije $f(x, y)$ pri pogoju $g(x, y) = 1$.

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo funkcijo

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

in njena parcialna odvoda izenačimo z 0. *Dobimo enačbi*

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 2x + y - 2\lambda xy & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & x - \lambda x^2 & = & 0\,. \end{array}$$

Zaradi pogoja $x = 0$ *ne pride v poštev, zato v drugi enačbi pokrajšamo* x *in sledi* $\lambda x = 1$. *Vstavimo v prvo enačbo in dobimo*

$$2x + y - 2y = 0\,,$$

torej $y = 2x$. *Iz pogoja sledi* $2x^3 = 1$ *ali* $x = \sqrt[3]{1/2}$.

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Krajšanje in urejanje: 2 točki.*
- *Uporaba robnega pogoja: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo funkcija $f(x, y)$ dana z

$$f(x, y) = ax^2 + bxy\,,$$

kjer sta a in b različni pozitivni števili. Poiščite možne ekstreme funkcije $f(x, y)$ pri pogoju $g(x, y) = 1$.

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo funkcijo

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

in njena parcialna odvoda izenačimo z 0. *Dobimo enačbi*

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 2ax + by - 2\lambda xy & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & bx - \lambda x^2 & = & 0\,. \end{array}$$

Zaradi pogoja $x = 0$ *ne pride v poštev, zato v drugi enačbi pokrajšamo* x *in sledi* $\lambda x = b$. *Vstavimo v prv0 enačbo in dobimo*

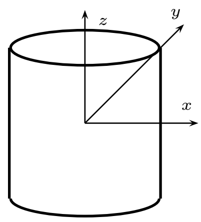
$$2ax + by - 2by = 0\,,$$

torej $2ax = by$. *Iz pogoja sledi* $2ax^3/b = 1$ *ali* $x = \sqrt[3]{b/2a}$.

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Krajšanje in urejanje: 2 točki.*
- *Uporaba robnega pogoja: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Valj postavimo v koordinatni sistem tako, kot kaže spodnja slika. Geometrijsko središče valja je v izhodišču koordinatnega sistema. Višina valja naj bo $2H$ in polmer osnovne ploskve R.



a. (10) Izračunajte masni vztrajnostni vztrajnostni moment valja I_{xx} okrog osi x za valj s konstantno masno gostoto ρ, torej

$$I_{xx} = \rho \int_V (y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Vpeljemo cilindrične koordinate. Integral preide v

$$\begin{aligned}
\rho \int_V (y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z &= \rho \int_{-H}^{H} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R (r^2 \sin^2\phi + z^2) r \mathrm{d}r \\
&= \rho \int_{-H}^{H} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} (\frac{R^4}{4} \sin^2\phi + \frac{R^2 z^2}{2}) \mathrm{d}\phi \\
&= \rho \int_{-H}^{H} (\frac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 z^2)\, \mathrm{d}z \\
&= \rho (\frac{2\pi R^4 H}{4} + \frac{2\pi R^2 H^3}{3}) \\
&= \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{3}
\end{aligned}$$

Tukaj je m masa valja.

Ocenjevanje:

- *Uvedba cilindričnih koordinat: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integracija: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_V \frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Spet uvedemo cilindrične koordinate. Integriramo ne-negativno funkcijo, zato bo integral dobro definiran, če obstaja.

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z &= \int_{-H}^{H}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^R \frac{r^2\cos^2\phi+z^2}{r} r\mathrm{d}r \\
&= \int_{-H}^{H}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}(\frac{R^3}{3}\cos^2\phi+Rz^2)\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-H}^{H}(\frac{\pi R^3}{3}+2\pi Rz^2)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{2\pi R^3H}{3}+\frac{4\pi RH^3}{3}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Uvedba cilindričnih koordinat: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integracija: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev naj bo dana parametrično z

$$\Phi(u,v) = \left(a\sqrt{1+v^2}\cos u,\ a\sqrt{1+v^2}\sin u,\ v\right)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $-1 \le v \le 1$.

a. (10) Poiščite vektor $\mathbf{n}$, ki je pravokoten na ploskev v točki $(\sqrt{2}a, 0, 1)$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = a\sqrt{1+v^2}\,(-\sin u, \cos u, 0) \qquad \textit{in} \qquad \Phi_v = \left(\frac{av\cos u}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{av\sin u}{\sqrt{1+v^2}}, 1\right).$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = a\sqrt{1+v^2}\left(\cos u, \sin u, -\frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\right).$$

Velja $\Phi(0,1) = (\sqrt{2}a, 0, 1)$, *torej*

$$\mathbf{n} = \left(\sqrt{2}a, 0, -a^2\right).$$

Ocenjevanje:

- Φ_u*: 2 točki.*
- Φ_v*: 2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*
- *Parametri: 2 točki.*
- $\mathbf{n}$*: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev, s tem da izberete normalo z negativno z-komponento za $z > 0$.

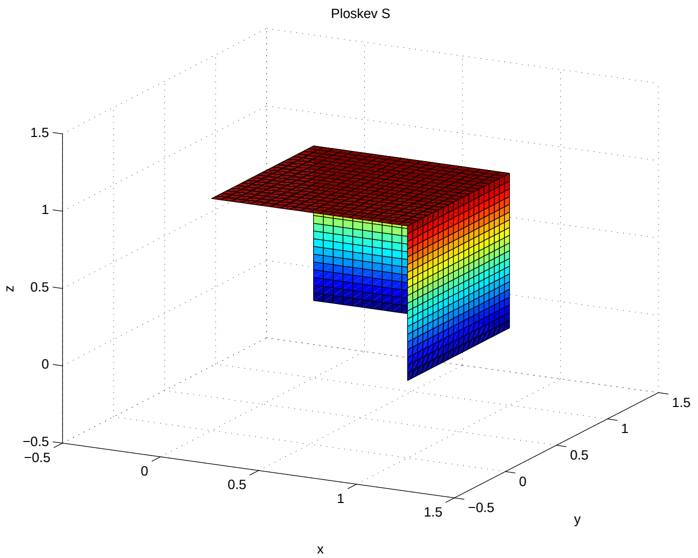
Rešitev: Iz prvega dela sklepamo, da izberemo za normalo $\Phi_u \times \Phi_v$. *Računamo*

$$\begin{aligned}\text{Pretok} &= \int_Q \mathbf{F}\cdot(\Phi_u \times \Phi_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_{-1}^{1} \left(a^2(1+v^2)\cos^2 u + a^2(1+v^2)\sin^2 u - a^2v^2\right)\mathrm{d}v \\ &= 4\pi a^2\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Predznak normale: 2 točki.*
- *Vstavljanje in meje: 2 točki.*
- *Fubini in notranji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F} = (xz, yz, z^2)$.



Slika 1 Izgled ploskve $\mathcal{S}$.

a. (10) Naj bo $Q = [0,1]^3$ kocka. Naj bo ploskev $\mathcal{S}$ tisti del površine kocke, ki ne leži v nobeni od koordinatnih ravnin kot na Sliki 1. Za normalo si izberite vektorje, ki kažejo iz kocke. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi to površino.

Rešitev: Pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ *skozi vsako od ploskev kock, ki so v koordinatnih ravninah, je enak* 0*, ker je na teh licih kocke vektorsko polje vzporedno s ploskvijo. Dano ploskev lahko "zapremo" v zaključeno ploskev* ∂Q*, ne da bi s tem spremenili pretok. Izračunamo* $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 4z$*. Po Gaussovem izreku je*

$$\begin{aligned}\int_{\partial Q} \mathbf{F}\, d\mathcal{S} &= \int_Q \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dx\, dy\, dz \\ &= 4\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 z\, dz \\ &= 2\,.\end{aligned}$$

Iskani pretok je 2*.*

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je pretok skozi ostale ploskve* 0*: 2 točki.*
- *Sklep za vse tri ploskve: 2 točki.*
- *Ideja z zapiranjem: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss in rezultat: 2 točki.,*

b. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja **F** skozi vsako lice kocke posebej. Za normalo vedno izberemo vektorje, ki kažejo iz kocke.

Rešitev: Na delu ploskve, kjer je $z = 1$*, je* $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}S$*. Pretok je enak kar površini tega dela ploskve, ki je* 1*. Na delu površine kocke, kjer je* $y = 1$*, je* $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = z\mathrm{d}S$*, torej je pretok*

$$\int_0^1 dx \int_0^1 z\,\mathrm{d}z = 1/2\,.$$

Po simetriji, je tudi pretok skozi lice, kjer je $x = 1$ *enak* 1*.*

Ocenjevanje:

- *Vrhnje lice: 2 točki.*
- $y = 1$*: 2 toǩi.*
- *Integral: 2 točki.*
- $x = 1$*: 2 točki.*
- *Simetrija: 2 točki.*