FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

18. december 1998

Ime in priimek: ______________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Naj bo dana funkcija $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x,y,z) = x^2y + e^x + z\,.$$

a. (10) Dokažite, da na primerni okolici U točke $(1,-1)$ obstaja funkcija $g\colon U \to \mathbb{R}$, taka da je $g(1,-1) = 0$ in

$$f(g(y,z),y,z,) = 0 \qquad \text{za } (y,z) \in U.$$

Izračunajte še parcialna odvoda $g_y(1,-1)$ in $g_z(1,-1)$.

Rešitev: Po izreku o implicitni funkciji je potrebno preveriti, da je $f_x(0,1,-1) \neq 0$. Izračunamo

$$f_x(x,y,z) = 2xy + e^x, \qquad \text{torej} \qquad f_x(0,1,-1) = 1 \neq 0\,.$$

Parcialna odvoda izračunamo po formuli

$$g_y(1,-1) = -\frac{f_y(0,1,-1)}{f_x(0,1,-1)} = 0 \qquad g_z(1,-1) = -\frac{f_z(0,1,-1)}{f_x(0,1,-1)} = -1\,.$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $f(x_0,y_0,z_0) = 0$: 2 točki.*
- *Preverjanje $f_x(x_0,y_0,z_0) \neq 0$: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *$g_y(1,-1)$: 2 točki.*
- *$g_z(1,-1)$: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še drugi parcialni odvod $g_{yy}(1,-1)$.

Rešitev: Identiteto $f(g(y,z),y,z) = 0$ odvajamo najprej po y.

$$f_x \cdot g_y + f_y = 0\,.$$

Odvajamo to zadnjo relacijo še po y. Dobimo

$$(f_{xx} \cdot g_y + f_{xy}) \cdot g_y + f_x \cdot g_{yy} + f_{xy} \cdot g_y + f_{yy} = 0\,.$$

V vseh dvojnih parcialnih odvodih f moramo vstaviti točko $(0,1,-1)$, v parcialnih odvodih g pa točko $(1,-1)$. Dobimo

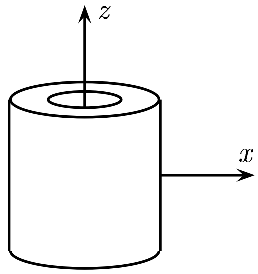
$$\begin{array}{lll} f_{xx}(0,1,-1) = 2 & f_{xy}(0,1,-1) = 0 & f_{yy}(0,1,-1) = 0 \\ f_x(0,1,-1) = 1 & g_y(1,-1) = 0 & \end{array}$$

Vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo $g_{yy}(1,-1) = 0$.

Ocenjevanje:

- *Prvo odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo dvajanje: 2 točki.*
- f_{xx}: *2 točki.*
- f_{xy}: *2 točki.*
- f_{yy}: *2 točki.*

2. (20) Na sliki je votli valj s konstantno masno gostoto ρ. Os z je os simetrije votlega valja, os x pa je vzporedna osnovnima ploskvama in gre skozi težišče telesa. Višina valja je $2c$, notranji polmer je a in zunanji polmer je b.



a. (10) Izračunajte masni vztrajnostni moment

$$I_{zz} = \rho \int_V (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

telesa okrog osi z.

Rešitev: Vpeljemo cilindrične koordinate in dobimo

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \rho \int_V (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\
&= \rho \int_{-c}^{c} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_a^b r^2 \cdot r\, \mathrm{d}r \\
&= \rho \cdot 2c \cdot 2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_a^b \\
&= \rho \cdot 2c \cdot 2\pi \cdot \frac{b^4 - a^4}{4} \\
&= \rho c \pi (b^2 + a^2)(b^2 - a^2) \\
&= m \cdot \frac{b^2 + a^2}{2}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Uvedba cilindričnih koordinat: 4 točke.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Posamezni integrali: 1+1+1 točka.*
- *Rezultat: 1 točka.*

b. (10) Izračunajte še masni vztrajnostni moment

$$I_{xx} = \rho \int_V (y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

telesa.

Rešitev: Spet uvedemo cilindrične koordinate. Dobimo

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \rho \int_V (y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\
&= \rho \int_{-c}^{c} z^2\, \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_a^b r\, \mathrm{d}r + \rho \int_{-c}^{c} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, \mathrm{d}\phi \int_a^b r^3\, \mathrm{d}r \\
&= \rho \cdot \frac{2c^3}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} + \rho \cdot 2c \cdot \pi \cdot \frac{b^4 - a^4}{4} \\
&= m\frac{c^2}{3} + m\frac{a^2 + b^2}{4}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Uvedba cilindričnih koordinat: 4 točke.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Posamezna integrala: 2+2 točki.*

3. (20) Naj bo na $\mathbb{R}^3$ dano vektorsko polje $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

a. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja skozi ploskve piramide omejene s koordinatnimi ravninami in ravnino $z = 1 - x - y$, torej $G = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 1 - x - y\}$. Vedno si izberite normalo, ki kaže iz piramide.

Rešitev: Uporabimo Gaussov izrek. Očitno je $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 3$*, torej je pretok enak integralu konstante po piramidi, kar je enako* $3V$*, kjer je* V *volumen piramide. Pretpk je torej* $1/18$*.*

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 3 točke.*
- *Integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev, ki je graf funkcije $z = f(x, y) = 1 - x - y$ na območju $G = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 1\}$. Za normalo si izberite vektor $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Rešitev: Opazimo, da je vektorsko polje na koordinatnih ravninah vzporedno s koordinatnimi razninami, tako da je pretok skozi dano ploskev enak pretoku skozi celo piramido. Rezultat je $1/18$*.*

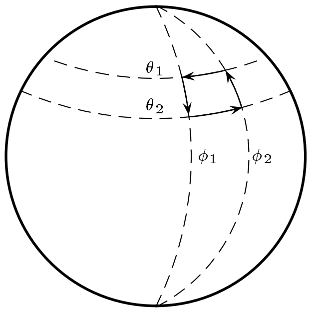
Ocenjevanje:

- *Divergenca: Po presoji.*

4. (20) Vektorsko polje $\mathbf{F}$ naj bo dano s komponentami

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= 2x - y \\ F_2(x,y,z) &= -yz^2 \\ F_3(x,y,z) &= -y^2 z \end{aligned}$$

a. (10) Izračunajte krivuljni integral po robu dela krogle s polmerom R med zemjepisnima širinama θ_1 in θ_2 in zemljepisnima dolžinama ϕ_1 in ϕ_2. Orientacija naj bo v smeri nasprotni urinemu kazalcu kot na spodnji sliki.



Rešitev: Uporabili bomo Stokesov izrek. Izračunamo $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (0,0,1)$. *Integral po dani poti je enak pretoku rotorja skozi ploskev. Ker je rotor konstanten, bo ta ploskovni integral enak ploščini projekcije ploskve na xy-ravnino, ki je* $(\theta_2 - \theta_1)(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)$.

Ocenjevanje:

- *Rotor: 4 točke.*
- *Ideja s projekcijo: 3 točke.*
- *Razultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte še krivuljni integral $\oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{F}, \mathbf{n})\,\mathbf{n}\,d\mathbf{r}$ po isti krivulji kot zgoraj, kjer je $\mathbf{n}$ zunanja normala na ploskev.

Rešitev: Polje je ves čas pravokotno na pot. Integral po poti mora biti enak 0.

Ocenjevanje:

- *Po presoji.*

5. (20) Funkcija $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ naj bo definirana z

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{za } 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{za } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{za } x = 0, \pi, -\pi. \end{cases}$$

a. (10) Dokažite, da je za $0 < x < \pi$

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}.$$

Utemeljite, zakaj Fourierova vrsta za $0 < x < \pi$ konvergira proti $\cos x$.

Rešitev: Funkcija le liha, zato je $a_n = 0$ za vse $n \geq 0$. Izračunajmo najprej

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin x \, \mathrm{d}x = 0,$$

kot se brž prepričamo s substitucijo $2x = u$. Za $n > 0$ zapišemo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-(-1)^{n+1} + 1}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Brž se prepričamo, da za lihe n dobimo $b_n = 0$, za sode pa $b_n = (1/\pi)4n/(n^2 - 1)$. Če sode n zapišemo kot $2k$ in seštevamo po k dobimo točno zgornji rezultat. Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki, ker je $f(x)$ odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva in velja povsod $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$.

b. (10) Uporabite a. za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{4(2n+1)^2 - 1}.$$

Rešitev: V zgornjo vrsto vstavimo $x = \pi/4$. Ostanejo samo lihi členi, ker je $\sin(k\pi) = 0$ *za vsak k. V Fourierovi vrsti za $f(x)$ na levi dobimo $f(\pi/4) =$* $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$*, na desni pa iskano vrsto pomnoženo z $8/\pi$. Rezultat je* $\pi\sqrt{2}/16$.

6. (20) Dana je diferencialna enačba prvega reda

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

a. (10) Pokažite, da rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju $y(1) = 0$, ustreza enačbi

$$\operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + \log(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \log(x).$$

Rešitev: Enačbo prepišemo v obliko

$$y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Enačba je homogena in jo rešujemo z nastavkom $y(x) = x \cdot u(x)$. *Vstavimo in dobimo*

$$u + xu' = \frac{1+u}{1-u},$$

torej

$$\frac{u'(1-u)}{1+u^2} = \frac{1}{x}.$$

Obestrani integriramo po x.

$$\operatorname{arctg}(u) + \frac{1}{2} \cdot \log(1+u^2) = \log(x) + c.$$

Začetni pogoj pravi $u(1) = 0$, *kar določi še konstanto* $c = 0$. *Vstavimo* $u = y/x$ *in dobimo želeno enačbo.*

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je enačba homogena: 3 točke.*
- *Uporaba nastavka za homogeno enačbo: 3 točke.*
- *Integrotanje: 2 točki.*
- *Določanje konstante: 2 točki.*

b. (10) Pod kakšnim kotom seka rešitev enačbe iz a. premico $y = x/2$?

Rešitev: Na presečišču je $y/x = 1/2$, *torej je* $y' = 3$. *Računamo torej kot med vektorjem* $(2, 1)$ *in* $(1, 3)$. *Vemo, da je*

$$\cos\phi = (2,1) \cdot (1,3)/(\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}) = \sqrt{2}/2.$$

Kot je torej $\pi/4$.

Ocenjevanje:

- *Izračun* y' *na presečišču: 4 točke.*
- *Ideja računanja kot med tangentama: 3 točke.*
- *Kot: 3 točke.*

7. (20) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix},$$

kjer sta a in b pozitivni konstanti.

a. (10) Naj bosta $y_1(t)$ in $y_2(t)$ rešitvi sistema enačb

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Pokažite, da če velja $y_1(0) + y_2(0) = 1$, potem je tudi $y_1(t) + y_2(t) = 1$.

Rešitev: Za a. in b. del naloge bo najlaže, če poiščemo fundamentalno matriko rešitev. Karakteristični polinom je $P(\lambda) = \lambda(\lambda - a - b)$. Pripadajoča lastna vektorja sta $\mathbf{x}_1 = (b, a)$ in $\mathbf{x}_2 = (1, -1)$ Prvi stolpec v fundamentalni matriki rešitev bo

$$\mathbf{y}_1 = c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + c_2 \cdot e^{-(a+b)t} \mathbf{x}_2 .$$

Iz začetnih pogojev sledi $c_1 b + c_2 = 1$ in $c_1 a - c_2 = 0$, torej $c_2 = a/(a+b)$ in $c_1 = 1/(a+b)$. Podobno izračunamo še drugi stolpec fundamentalne matrike rešitev in dobimo

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} (b + ae^{-(a+b)t})/(a+b) & b(1 - e^{-(a+b)t})/(a+b) \\ a(1 - e^{-(a+b)t})/(a+b) & (a + be^{-(a+b)t})/(a+b) \end{pmatrix}.$$

Oba stolpca fundamentalne rešitve se seštejeta v 1, torej je vedno $y_1(t)+y_2(t) = 1$, če to velja za $t = 0$.

Ocenjevanje:

- *Lastni vrednosti: 2 točki.*
- *Lastna vektorja: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Rešitev pri začetnem pogoju: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, ki ustreza pogoju $\mathbf{y}(1) = (0, 1)^T$.

Rešitev: Iskana rešitev je

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c},$$

kjer je $\mathbf{c} = (0, 1)$, torej

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} b(1 - e^{-(a+b)t})/(a+b) \\ (a + be^{-(a+b)t})/(a+b) \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Uporaba fundamentalne matrike: 5 točk.*
- *Rezultat: 5 točk.*

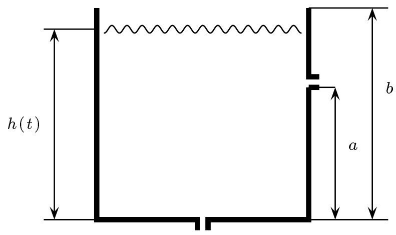
8. (20) Valjasta posoda je do višine b napolnjena z vodo. Na višini $a < b$ je odprtina s presekom ω in na dnu je odprtina s presekom ω. Označimo z $h(t)$ višino gladine v trenutku t (glej sliko), pri čemer je $h(0) = b$. Funkcija $h(t)$ ustreza diferencialni enačbi

$$\omega\mu\sqrt{2gh} + \omega\mu\sqrt{2g(h-a)} = -Dh'$$

dokler gladina ne doseže prve odprtine in enačbi

$$\omega\mu\sqrt{2gh} = -Dh'\,,$$

ko je gladina pod višino a. Pri tem je g zemeljski pospešek, μ dana konstanta in D ploščina osnovne ploskve valja.



a. (10) Izračunajte čas, ki je potreben, da gladina doseže prvo odprtino.

Rešitev: Diferencialno enačbo prepišemo v obliko

$$\frac{h'}{\sqrt{h}+\sqrt{h-a}} = -\beta\,,$$

kjer je $\beta = \omega\mu\sqrt{2g}/D$. Integriramo levo in desno stran in dobimo

$$\frac{2h^{3/2}}{3a} - \frac{2(h-a)^{3/2}}{3a} = -\beta t + c\,.$$

Iz začetnih pogojev sledi

$$\frac{2b^{3/2}}{3a} - \frac{2(b-a)^{3/2}}{3a} = c\,.$$

Iz tega razberemo, da je čas, ki je potreben, da gladina doseže višino a enak

$$t_1 = \frac{2}{3a\beta}(b^{3/2} - a^{3/2} - (b-a)^{3/2}) .$$

Ocenjevanje:

- *Spoznanje, da je enačba z ločljivima spremenljivkama: 2 točki.*
- *Prepsi v primerno obliko: 2 točki.*
- *Izračun integrala: 2 točki.*
- *Uporaba začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Po kolikšnem času bo posoda prazna?

Rešitev: Očitno bo rešitev $t_1 + t_2$*, kjer je* t_1 *čas iz a. in* t_2 *čas, ki je potreben, da izteče vsa voda potem, ko bo enkrat dosegla nivo* a*. Če začnemo po* t_1 *znova meriti čas, moramo rešiti drugo od zgornjih dveh diferencialnih enačb z začetnim pogojem* $h(0) = a$*. Prepišemo v*

$$\frac{h'}{\sqrt{h}} = -\beta ,$$

integriramo

$$2\sqrt{h} = -\beta t + c$$

in določimo $c = 2\sqrt{a}$*. Ko je* $h = 0$*, mora biti* $t_2 = 2\sqrt{a}/\beta$*. Celoten čas, dokler ne izteče vsa voda, je* $t_1 + t_2$*.*

Ocenjevanje:

- *Spoznanje, da je čas* $t_1 + t_2$*: 2 točki.*
- *Prepisovanje diferencialne enačbe v primerno obliko: 2 točki.*
- *Integracija: 2 točki.*
- *Izračun casa* t_2 *2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*