FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

13. februar, 1998

Ime in priimek: ______________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2\,.$$

a. (10) Dokažite, da na primerni okolici U točke $(x_0, y_0) = (0, 0)$ obstaja funkcija $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, taka da je $g(0, 0) > 0$ in $F(x, y, g(x, y)) = 0$ za $(x, y) \in U$. Izračunajte še $g_x(0, 0)$ in $g_y(0, 0)$.

Rešitev: Najprej najdemo točko (x_0, y_0, z_0), za katero bo $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ in $z_0 > 0$. Zlahka se prepričamo, da je to točka $(0, 0, 1)$. Po izreku o implicitni funkciji obstaja okolica U točke $(0, 0)$ in funkcija g, če je $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Izračunamo $F_z(0, 0, 1) = 4$. Parcialne odvode izračunamo po formuli

$$\begin{aligned} g_x(0,0) &= -\frac{F_x(0,0,1)}{F_z(0,0,1)} = -\frac{1}{2} \\ g_y(0,0) &= -\frac{F_y(0,0,1)}{F_z(0,0,1)} = 0 \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Točka (x_0, y_0, z_0): 2 točki.*
- *Preverjanje $F_z(0, 0, 1) \neq 0$: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *$g_x(0, 0)$: 2 točki.*
- *$g_y(0, 0)$: 2 točki.*

b. (10) Najdite točko na ploskvi $F(x, y, z) = 0$, za katero je tangentna ravnina na ploskev vzporedna z xy-ravnino in je $z > 0$.

Rešitev: Po izreku o implicitni funkciji pridejo v poštev točke na ploskvi, za katere je $F_x(x, y, z) = 0$ in $F_y(x, y, z) = 0$. Iz teh dveh zahtev dobimo enačbi

$$\begin{aligned} 2x + 2z &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned}$$

Sledi $y = 0$, in ker mora biti točka tudi na ploskvi, mora veljati

$$x^2 + 2z^2 + 2xz - 2 = x^2 - 2 = 0\,.$$

Torej je $x = \pm\sqrt{2}$. *Ker je* $z = -x$ *izberemo točko* $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$. *Utemeljiti moramo le še uporabo izreka o implicitni funkciji, torej*

$$F_z(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \neq 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja o parcialnih odvodih: 3 točke.*
- *Enačbe za* x, y *in* z*: 3 točke.*
- *Rešitev: 2 točki.*
- *Naknadno preverjanje* $F_z(x, y, z) \neq 0$*: 2 točki.*

2. (20) Območje K v $\mathbb{R}^3$ naj bo krogla s polmerom 1 in središčem v točki $(0,0,1)$, torej

$$K = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1\}\,.$$

a. (10) Izračunajte integral

$$\int_K (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Uvedemo krogelne koordinate. Področje K se pretvori v

$$H = \{(r,\phi,\theta)\colon 0\le\phi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi/2, 0\le r\le 2\cos\theta\}\,.$$

Dobimo

$$\begin{aligned}\int_K (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^3\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{2^6\cos^6\theta\sin\theta}{6}\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi\frac{2^6}{6\cdot 7}\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Uvedba krogelnih koordinat: 2 točki.*
- *Transformacija področja: 4 točke.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte izlimitirani integral

$$\int_K \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Utemeljite, da je izlimitirani integral dobro definiran.

Rešitev: Funkcija, ki jo integriramo, je na K ne-negativna, zato bo integral, če obstaja, dobro definiran. Uvedimo polarne koordinate. Kot v a. se področje transformira v

$$H = \{(r,\phi,\theta)\colon 0\le\phi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi/2, 0\le r\le 2\cos\theta\}\,.$$

Integral preide v

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \frac{r\cos\theta}{r^3} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \\
= \; & 4\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \\
= \; & \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Uvedba polarnih koordinat: 3 točke.*
- *Pravilna transformacija integrala: 3 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da je integral dobro definiran: 2 točki.*

3. (20) Vektorsko polje $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + (z+x^2)\mathbf{k}$ je definirano na celem $\mathbb{R}^3$ in je tam zvezno odvedljivo.

a. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja skozi površino krogle s polmerom 1 in središčem v izhodišču. Za normalo izberemo vektor, ki kaže iz krogle.

Rešitev: Uporabimo Gaussov izrek. Izračunamo

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 2\,.$$

Integral te konstante po krogli je $8\pi/3$.

Ocenjevanje:

- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Izračun divergence: 3 točke.*
- *Izračun integrala po krogli: 5 točk.*

b. (10) Izračunajte pretok $\mathbf{F}$ skozi površino zgornje polovice krogle (brez osnovne ploskve v xy-ravnini). Za normalo izberite vektor, ki kaže iz krogle.

Rešitev: Uporabimo Gaussov izrek. Če površini krogle dodamo se krog v xy*-ravnini s polmerom 1 in središčem v izhodišču, dobimo z uporabo Gaussovega izreka, da je pretok skozi površino zgornje polovice krogle enak* $4\pi/3$. *Pretok samo skozi zgornji del krogle dobimo tako, da odštejemo pretok skozi krog v* xy *ravnini. Normala na krog je* $-\mathbf{k}$, *torej je pretok enak*

$$\int_K -x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Rezultat: $4\pi/3 + \pi/4 = 19\pi/12$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z Gaussovim izrekom: 4 točke.*
- *Izračun integrala po celotni površini polkrogle: 2 točki.*
- *Izračun pretoka skozi osnovno ploskev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Vektorsko polje $\mathbf{F}$ na $\mathbb{R}^3$ naj bo dano z $\mathbf{F} = -z^2\mathbf{i} + z^2x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

a. (10) Pokažite, da je ploskovni integral polja $\mathbf{G} = -2zx\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ po vsaki ploskvi, katere rob leži v xy-ravnini, enak 0.

Rešitev: Integral po ploskvi rotorja polja je po Stokesovem izreku enak integralu polja po robu ploskve. Izračunamo

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = -2zx\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}\,.$$

Polje $\mathbf{F}$ je na xy-ravnini enako 0, zato je integral po vsaki poti enak 0.

Ocenjevanje:

- *Ideja s Stokesovim izrekom: 4 točke.*
- *Izračun rotorja: 3 točke.*
- *Opažanje, da je krivuljni integral v ravnini enak 0: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_{\partial\mathbf{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

po robu ploskve $\mathbf{S}$, ki je graf funkcije $f(x,y) = 1 - x - y$ na območju $\Delta = \{(x,y)\colon x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Rešitev: Po Stokesovem izreku je potrebno integrirati rotor polja $\mathbf{F}$ po opisani ploskvi. Rotor smo izračunali v a. Po formuli za ploskovni integral po grafu funkcije dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{\Delta} (-2zx - 2z + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_{\Delta} (1 - x - y)(1 + 3x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (1 + 2x - 3x^2 - 4xy - y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_0^1 (2/3 - 2x^2 + 4x^3/3)\,\mathrm{d}x \\
&= 2/3 - 2/3 + 1/3 \\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Uporaba Stokesovega izreka: 3 točke.*
- *Formula za ploskovni integral po $\mathbf{S}$: 3 točke.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo na intervalu $[-\pi,\pi]$ dana z

$$f(x)=\pi-|x|\,.$$

a. (10) Zapišite Fourierovo vrsto za to funkcijo. Utemeljite, da Fourierova vrsta v vsaki točki x intervala $[-\pi,\pi]$ konvergira proti $f(x)$.

Rešitev: Funkcija $f(x)$ je soda, zato je $b_k=0$ za vse $k\geq 1$. Hitro se prepričamo, da je $a_0=\pi$. Za $k\geq 1$ računamo

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{\pi}[x\cdot\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^\pi-\frac{1}{k}\int_0^\pi \sin kx\,\mathrm{d}x] \\ &= -\frac{2}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi k^2}\cdot(1-(-1)^k) \end{aligned}$$

Fourierova vrsta je enaka

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}\,.$$

Funkcija $f(x)$ je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, tako da njena Fourierova vrsta konvergira za vsak x proti $f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je funkcija soda: 2 točki.*
- *a_0: 2 točki.*
- *a_k: 4 točke.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte vsoto neskončne vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots\,.$$

Rešitev: V zgornjo Fourierovo vrsto vstavimo $x = \pi$. *Dobimo*

$$0 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)\pi)}{(2k-1)^2}\,.$$

Upoštevamo, da je $\cos((2k-1)\pi) = -1$ *in dobimo*

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- $x = \pi$: *3 točke.*
- *Pretvorba na želeno vrsto: 3 točke.*
- *Vsota neskončne vrste: 4 točke.*

6. (20) Gibanje cirkularnega filtra opisuje diferencialna enačba

$$\ddot{y} - 2p\dot{y} - p^2 = 0$$

za $p > 0$.

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Enačba je nehomogena drugega reda. Najprej poiščemo rešitev homogene enačbe. Karakteristični polinom je oblike

$$\lambda^2 - 2p\lambda = 0$$

s koreni $\lambda = 0$ in $\lambda = 2p$. Potrebujemo še rešitev nehomogene enačbe. Nastavek, ki ga uporabimo, bo oblike $y(t) = At + B$, ker je na levi strani konstanta in je $\lambda = 0$ ničla prve stopnje karakterističnega polinoma. Vstavimo in dobimo

$$-2pA - p^2 = 0\,,$$

iz česar sledi $A = -p/2$. Splošna rešitev enačbe bo oblike

$$y(t) = -\frac{pt}{2} + c_1 + c_2 e^{2pt}\,.$$

Opomba: V rešitvi nehomogene enačbe nastopa še poljubna konstanta B, ki jo vsrkamo v c_1.

Ocenjevanje:

- *Rešitev homogenega dela: 3 točke.*
- *Nastavek za nehomogeni del: 3 točke.*
- *Rešitev nehomogenega dela: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe, ki ustreza začetnemu pogoju $y(0) = 0$ in pogoju $\lim_{t\to\infty} e^{-2pt} y(t) = 1$.

Rešitev: V splošni rešitvi moramo izbrati konstanti c_1 in c_2 tako, da bo zadoščeno pogojema. Iz prvega pogoja dobimo enačbo

$$c_1 + c_2 = 0$$

iz drugega pa

$$\lim_{t\to\infty} e^{-2pt} y(t) = c_2 = 1\,.$$

Iskana rešitev je

$$y(t) = -\frac{pt}{2} - 1 + e^{2pt}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prva enačba za koeficienta: 3 točke.*
- *Druga enačba za koeficienta: 3 točke.*
- *Pravilna rešitev: 4 točke.*

7. (20) Dan je sistem linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -bx - 2by \\ \dot{y} &= bx + by \end{aligned}$$

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko sistema.

Rešitev: Matrika sistema je oblike

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -b & -2b \\ b & b \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrike je $\lambda^2 + b^2$ *z lastnima vrednostma* $\lambda_1 = bi$ *in* $\lambda_2 = -bi$. *Lastni vektor, ki pripada* λ_1, *je* $\mathbf{x}_1 = (-1, 1 - i)$. *Linearno neodvisni rešitvi sistema bosta realni in imaginarni del produkta* $e^{bit} \cdot \mathbf{x}_1$. *Dobimo rešitvi*

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \cos(bt) + \sin(bt) \\ -\cos(bt) \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} -\cos(bt) + \sin(bt) \\ \sin(bt) \end{pmatrix}.$$

Stolpca fundamentalne matrike rešitev bosta oblike $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$. *Po kratkem računu dobimo*

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos(bt) - \sin(bt) & -2\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) + \sin(bt) \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Lastni vrednosti: 2 točki.*
- *Lastna vektorja: 2 točki.*
- *Neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Fundamentalna matrika: 4 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev sistema, ki ustreza začetnemu pogoju $x(\pi/b) = y(\pi/b) = 1$.

Rešitev: Vse rešitve sistema so oblike $\mathbf{y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{c}$. *Začetnemu pogoju bo zadoščeno, če bo*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c}\,.$$

Sledi $\mathbf{c} = (-1, -1)^T$. *Iskana rešitev je*

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -\cos(bt) + 3\sin(bt) \\ -\cos(bt) - 2\sin(bt) \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 5 točk.*
- *Rešitev: 5 točk.*

8. (20) Žogo napolnjeno z zrakom izpustimo v vodi na globini h_0. Na žogo delujejo:

- Sila težnosti mg, m-masa žoge, g težnostna konstanta.
- Sila vzgona $V\rho g$, V prostornina žoge, ρ-gostota vode.
- Upor vode kv, k-primerna konstanta, v hitrost gibanja žoge.

Predpostavimo, da je $V\rho > m$, torej da bo žoga "izplavala". Po Newtonovem zakonu gibanje žoge v vodi opisuje diferencialna enačba

$$m\dot{v} = V\rho g - mg - kv\,.$$

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe za v.

Rešitev: Enačba je linearna s konstantnimi koeficienti. Rešitev homogenega dela je

$$v(t) = ce^{-kt/m}\,.$$

Na desni strani v nehomogeni enačbi je konstanta, zato mora biti tudi rešitev nehomogene enačbe konstanta. Zlahka dobimo, da je splošna rešitev oblike

$$v(t) = \frac{g(V\rho - m)}{k} + ce^{-kt/m}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Rešitev homogenega dela: 4 točke.*
- *Rešitev nehomogenega dela: 4 točke.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Recimo, da žoga potrebuje iz globine h_0 do površine t_0 enot časa. Za konstante m, g, ρ in k privzamemo, da so znane. Izpeljite formulo za prostornino žoge. Ko žogo spustimo v globini h_0 je njena hitrost enaka $v(0) = 0$.

Rešitev: Iz začetnega pogoja dobimo rešitev

$$v(t) = \frac{g(V\rho - m)}{k}(1 - e^{-kt/m})\,.$$

Iz podatkov naloge razberemo, da je

$$h_0 = \int_0^{t_0} v(s)\,\mathrm{d}s = \frac{g(V\rho - m)}{k}(t_0 - \frac{m}{k}(1 - e^{-kt_0/m}))\,.$$

Iz te formule sledi formula za V. *Dobimo*

$$V = [kh_0/(t_0 - \frac{m}{k}(1 - e^{-kt_0/m})) + m]/\rho\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravilna rešitev za v: 4 točke.*
- *Integriranje: 4 točke.*
- *Rešitev: 2 točki.*