FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

5. februar 2010

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ naj bo dvakrat zvezno odvedljiva in naj zadošča pogoju

$$u^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u\,\frac{\partial f}{\partial u} + v^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + v\,\frac{\partial f}{\partial v} + w^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + w\,\frac{\partial f}{\partial w} = 0\,.$$

a. (10) Pokažite, da funkcija $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$g(x,y,z) = f(e^x, e^y, e^z)\,,$$

zadošča enačbi

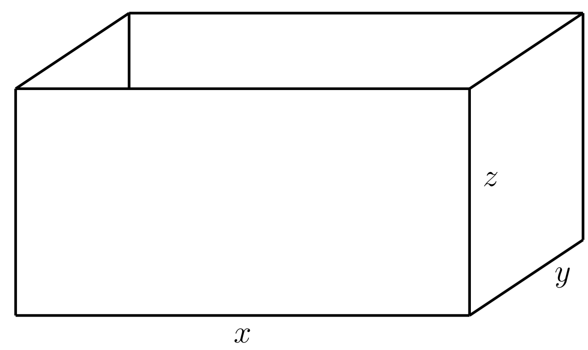
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0\,.$$

b. (10) Naj bo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva in naj velja $h'(0) = h''(0) = 0$. Definirajte funkcijo ϕ s predpisom

$$\phi(t) = f(e^{h(t)}, e^{h(t)}, e^{h(t)})\,.$$

Izračunajte $\phi''(0)$.

2. (20) Škatla v obliki kvadra (brez vrhnje ploskve) ima stranice x, y in z kot na sliki 1. Površina škatle je dana in enaka a, torej $xy + 2xz + 2yz = a$. Iščemo škatlo s to površino in največjo možno prostornino.

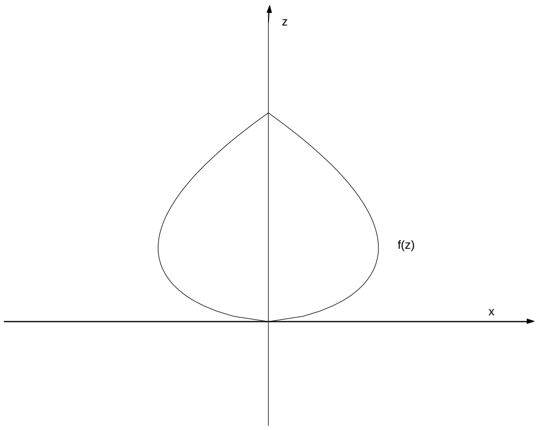


Slika 1 Škatla s stranicami x, y in z.

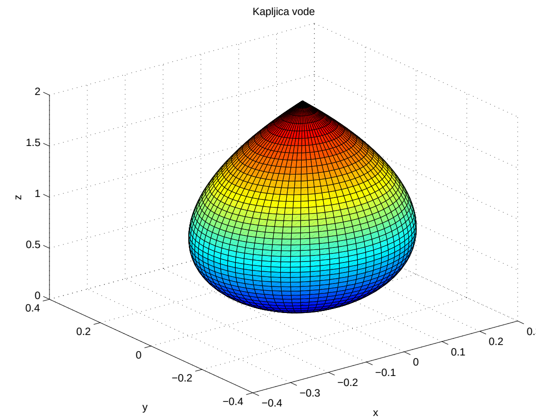
a. (10) Izpeljite, da iščemo vezani ekstrem funkcije $f(x, y, z) = xyz$ pri pogoju $g(x, y, z) = xy+2xz+2yz-a = 0$ in se prepričajte, da mora veljati $3xyz = 2\lambda a$.

b. (10) Poiščite dolžine stranic, za katere bo imela škatla pri zgornjem pogoju največjo prostornino $V = xyz$.

3. (20) Če pozitivno funkcijo $f(z)$ dano na intervalu $[0, h]$ kot na sliki 2a zavrtimo okrog osi z, opiše rotacijsko telo, ki ga vidite na sliki 2b.



Sl. 2a Funkcija $f(z)$.



Sl. 2b Rotacijsko telo, ki ga opiše $f(z)$.

a. (10) Pokažite, da dobimo prostornino in površino takega rotacijskega telesa po formulah

$$V = \pi \int_0^h [f(z)]^2 \, \mathrm{d}z \qquad \text{in} \qquad P = 2\pi \int_0^h f(z) \sqrt{1 + [f'(z)]^2} \, \mathrm{d}z \, .$$

Namig: Za površino vzemite parametrizacijo $\Phi(\phi, z) = (f(z) \cos \phi, f(z) \sin \phi, z)$.

b. (10) Izpeljite še formulo za masni vztrajnostni moment telesa okrog osi z. Privzemite, da je masna gostota enaka $\rho = 1$.

4. (20) Ploskev naj bo dana parametrično z

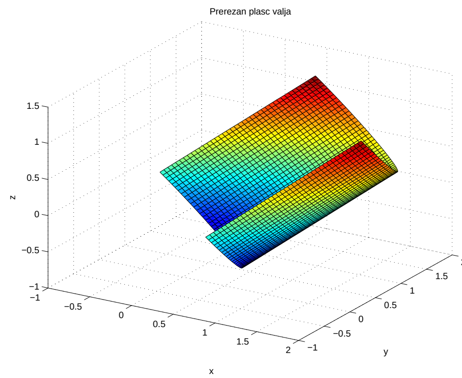
$$\Phi(u,v) = \left(a\sqrt{1+v^2}\cos u,\ a\sqrt{1+v^2}\sin u,\ v\right)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $-1 \le v \le 1$.

a. (10) Poiščite vektor $\mathbf{n}$, ki je pravokoten na ploskev v točki $(\sqrt{2}a, 0, 1)$.

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev, s tem da izberete normalo z negativno z-komponento za $z > 0$.

5. (20) Naj bo V valj z osjo $\mathbf{e} = (1,1,1)/\sqrt{3}$, polmerom $R = 1$ in višino h. Središči osnovnih ploskev naj bosta v točkah $(0,0,0)$ in $(h,h,h)/\sqrt{3}$. Plašč valja prerežemo z ravnino, ki gre skozi izhodišče in ima za normalo vektor $(-1,-1,2)$. Ploskev, ki nastane kot polovico plašča nad ravnino, označimo s $\mathcal{S}$. Ploskev je na Sliki 3.



Slika 3 Plašč valja.

a. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (2y - z, -2x, x)$. Pokažite, da je pretok $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ skozi ploskev $\mathcal{S}$ enak pretoku skozi pravokotnik, ki je nastal, ko smo valj prerezali. Za normalo na $\mathcal{S}$ izberemo vektor, ki kaže iz valja, za normalo na pravokotnik pa vektor $(1,1,-2)$.

   Namig: Dodajte kakšno ploskev.

b. (10) Izračunajte

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$