FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

19. februar 2010

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, naj bo dana z

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2 .$$

Funkcija $g\colon V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ naj bo na $V = \{(x,y)\colon x^2+y^2 > 1\}$ definirana z

$$g(x,y) = f\Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\Big) .$$

a. (10) Označite

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{in} \qquad v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} .$$

Izračunajte u_x, u_y, v_x, v_y, $u_x^2 + u_y^2$ in $v_x^2 + v_y^2$.

b. (10) Izračunajte $g_{xx} + g_{yy}$.

2. (20) Naj bosta $a > 0$ in $b > 0$ števili, za kateri velja $ab = 1$. Na območju $G = \{(x, y, z)\colon x > 0, z > 0, xz - y^2 > 0\}$ naj bo definirana funkcija

$$f(x, y, z) = \frac{\alpha}{2} \log(xz - y^2) - \frac{1}{2}(ax + bz)\,,$$

kjer je $\alpha > 0$ dano število.

a. (10) Pokažite, da je točka $(\alpha b, 0, \alpha a)$ lokalni maksimum funkcije $f(x, y, z)$.

b. (10) Naj bo funkcija $g\colon G \to \mathbb{R}$ dana z

$$g(x, y, z) = xz - y^2 - 1\,.$$

Poščite stacionarne točke funkcije $f(x, y, z)$ na območju G pri pogoju $g(x, y, z) = 0$.

3. (20) Naj bo $\Delta = \{(x,y,z)\colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$ piramida v $\mathbb{R}^3$.

a. (10) Izračunajte

$$I = \int_{\Delta} \frac{1}{\sqrt{xyz(1-x-y-z)}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

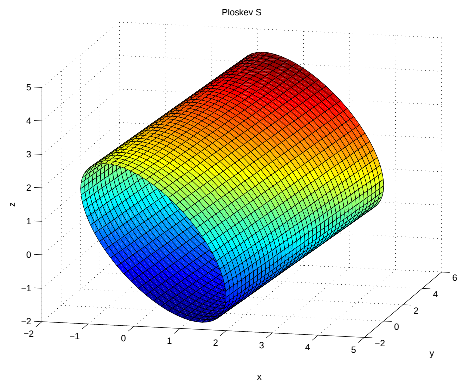
Namig: Uporabite $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\, \mathrm{d}u = \pi$ *in* $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u = \pi/2$.

b. (10) Naj bo $\Pi = \{(x,y,z) 0 < |x|+|y|+|z| \leq 1\}$ oktaeder v $\mathbb{R}^3$. Izračunajte masni vztrajnostni moment I_{zz} tega telesa okrog osi z. Privzemite, da je gostota konstantno 1.

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično s

$$\Phi(u,v) = (-\cos u + \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}\,v, -\cos u - \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}\,v, 2\cos u + \sqrt{2}v)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $0 \le v \le a$. Ploskev je na sliki 1.



Slika 1 Ploskev $\mathcal{S}$ dana v nalogi.

a. (10) Poiščite enotski vektor, normalen na ploskev v točki $(\sqrt{3}+a, -\sqrt{3}+a, a)$.

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$. Za normalo si izberite vektor $(\Phi_u \times \Phi_v)/|\Phi_u \times \Phi_v|$.

Namig: Ko boste računali notranji integral v

$$\int_0^a \mathrm{d}v \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\cdot(\Phi_u \times \Phi_v)\,\mathrm{d}u\,,$$

upoštevajte, da se členi oblike $\cos u$*,* $\sin u$ *ali* $\cos u \sin u$ *integrirajo v* 0.

5. (20) Telo G naj bo definirano kot presek na glavo obrnjenega neskončnega stožca z osjo enako osi z, vrhom v izhodišču in plaščem, ki z osjo z oklepa kot α, in krogle s središčem v $(0,0,1)$ in polmerom $R = 1$.

a. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (-y, x, z)$. Izračunajte pretok polja skozi del površine telesa G, ki sovpada s plaščem stožca. Za normalo vedno izberite zunanjo normalo.

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (bz - cy, -az + cx, ay - bx)$ za fiksna števila a, b in c. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi del površine telesa G, ki sovpada s plaščem stožca. Za normalo vedno izberite zunanjo normalo.

   Namig: Pomislite, če je polje $\mathbf{F}$ kje vzporedno s površino G.