FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

2. februar 2011

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bosta $f(u)$ in $g(v)$ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji.

a. (10) Definiramo

$$F(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)\,.$$

Izračunajte

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,.$$

b. (10) Definirajte

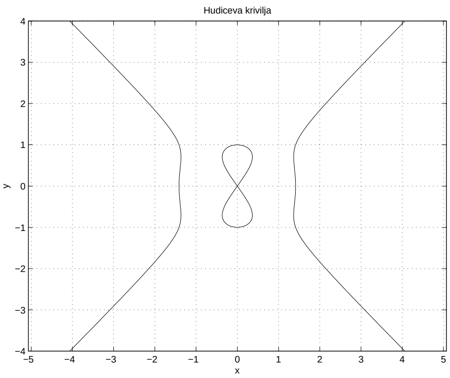
$$F(x,y) = \frac{1}{y}\left(f(x+y) + g(x-y)\right)\,.$$

Izračunajte

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{2}{y}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,.$$

2. (20) Na sliki 1 je "hudičeva krivulja" dana z enačbo

$$g(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + y^2 = 0\,.$$



Sl. 1 Hudičeva krivulja.

a. (10) Pokažite, da točka

$$(x_0, y_0) = \left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

leži na hudičevi krivulji in je lahko vezan ekstrem funkcije $f(x,y) = x$ pri pogoju $g(x,y) = 0$.

b. (10) Poiščite kje bi lahko bili ekstremi funkcije $h(x,y) = y$ pri pogoju $g(x,y) = 0$.

3. (20) Naj bo $0 < a < b$. Krogelna lupina $K_{a,b}$ naj bo dana z

$$K_{a,b} = \{(x, y, z) \colon a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}\,.$$

a. (10) Izračunajte

$$\int_{K_{a,b}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

b. (10) Naj bo $c > b$. Izračunajte

$$\int_{K_{a,b}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (c - z)^2}}\,.$$

Kot znano privzemite, da je

$$\int \frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{\alpha - \beta\cos u}} = \frac{2}{\beta}\sqrt{\alpha - \beta\cos u}\,.$$

4. (20) Ploskev naj bo dana s predpisom

$$\Phi(u,v) = \left(uv, u\sqrt{1-v^2}, \frac{1}{2}(u^2-1)\right)$$

za $0 \le u \le 1$ in $-1 \le v \le 1$.

a. (10) Izračunajte enotsko normalo na ploskev v točki $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4, -3/8)$.

b. (10) Naj bo vektorsko polje dano z $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, x, xy)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev v smeri normale z negativno z komponento.

5. (20) Naj bo vektorsko polje dano z $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, z^2, x^2)$.

a. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja skozi zgornjo polovico površine krogle $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Na zgornji polovici je $z > 0$. Normala naj ima pozitivno z-komponento.

b. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi tista lica kocke $Q = [0, 1]^3$, ki ne ležijo v nobeni od koordinatnih ravnin. Za normalo vedno izberite vektorje, ki kažejo iz kocke.