FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

17. februar 2011

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo za $u \neq 0$

$$f(u,v) = \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right) .$$

Naj bo

$$F(x,y) = f(x+y, x-y) .$$

a. (10) Izračunajte

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} .$$

b. (10) Izračunajte

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} .$$

2. (20) Naj bosta funkciji $f(x,z,y)$ in $g(x,y,z)$ dani z

$$f(x,y,z) = xyz \qquad \text{in} \qquad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \,.$$

a. (10) Katera točka bi lahko bila ekstrem funkcije $f(x,y,z)$ pri pogoju $g(x,y,z) = 1$ in je $x > 0$, $y > 0$ in $z > 0$?

b. (10) Naj bo

$$F(x,y) = x^2 y^2 (1 - x^2 - y^2)\,.$$

Ugotovite, ali je točka $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ lokalni maksimum ali lokalni minimum funkcije $F(x,y)$.

3. (20) Naj bo K^+ zgornja polovica krogle s središčem v izhodišču in polmerom R, torej

$$K^+ = \{(x,y,z)\colon x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}\,.$$

a. (10) Izračunajte integral

$$\int_{K^+} z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z\,.$$

b. (10) Privzemite, da ima opisano telo masno gostoto $\rho = 1$. Izračunajte masni vztrajnostni moment K^+ okrog osi x, torej integral

$$\int_{K^+} (y^2 + z^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z\,.$$

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana v parametrični obliki z

$$\Phi(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, \sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1} \right)$$

za $0 < a \le u \le b$ in $0 \le v \le 2\pi$.

a. (10) Izračunajte enotski normalni vektor na ploskev $\mathcal{S}$ v točki $\Phi(\sqrt{2}a, \pi/2) = (0, \sqrt{2}a, 1)$.

b. (10) Naj bo $\mathbf{F}(x,y,z) = (z-y, x-z, y-x)$. Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi ploskev $\mathcal{S}$ v smeri normale s pozitivno z komponento.

5. (20) Naj bo vektorsko polje dano z $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$.

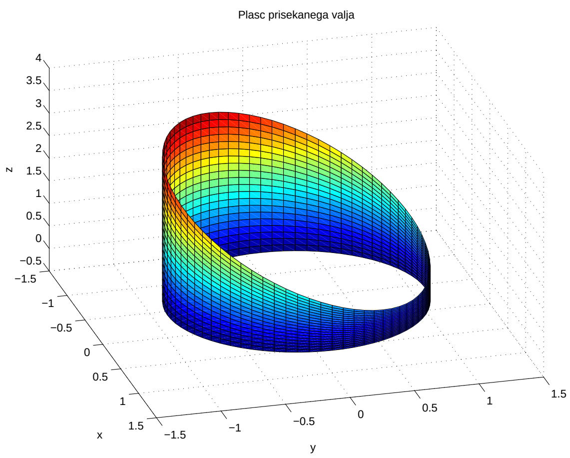
a. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja skozi plašč valja (v smeri zunanjih normal), danega z

$$G = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\}\,.$$

b. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi plašč prisekanega valja (v smeri zunanjih normal) danega z

$$G = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - x - y\}\,.$$

Plašč prisekanega valja je na sliki 1. Upoštevajte, da je enotska normala na ravnino, s katero smo prisekali valj, enaka $\mathbf{n} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$.



Slika 1 Plašč prisekanega valja.