FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

3. februar 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bosta $a > b$ pozitivni števili in naj za funkcijo $f(x, y)$ velja

$$-a^2 y \frac{\partial f}{\partial x} + b^2 x \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,.$$

a. (10) Naj bo

$$F(t) = f\left(\frac{\cos t}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}}, \frac{\sin t}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}}\right).$$

Izračunajte $F'(t)$.

Rešitev: Označimo

$$u(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}} \qquad \textit{in} \qquad v(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}}\,.$$

Velja

$$u'(t) = -\frac{a^2 \sin t}{\left(b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t\right)^{3/2}}$$

in

$$v'(t) = \frac{b^2 \cos t}{\left(b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t\right)^{3/2}}\,.$$

Po formuli za odvod sestavljene funkcije je

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial v} v'\,.$$

Vstavimo in dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial v} v' = \frac{1}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t} \cdot \left(-a^2 v \frac{\partial f}{\partial u} + b^2 u \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvod $u(t)$: 2 točki.*
- *Odvod $v(t)$: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Izpostavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Funkcija $g(x) > 0$ naj za nek $c > 0$ ustreza enačbi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{g^2(x)}{b^2} = c\,.$$

Izračunajte odvod sestavljene funkcije

$$F(x) = f(x, g(x))\,.$$

Rešitev: Po formuli za odvod sestavljene funkcije je

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g'(x)\,.$$

Iz enačbe za $g(x)$ z odvajanjem leve in desne strani sledi

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2g(x)g'(x)}{b^2} = 0\,,$$

torej

$$b^2 x + a^2 g(x) g'(x) = 0\,.$$

Sledi

$$g'(x) = -\frac{b^2 x}{a^2 g(x)}\,.$$

Vstavimo in sledi

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{b^2 x}{a^2 g(x)}\,.$$

Preobrazimo in napišemo nekoliko širše

$$F'(x) = -\frac{1}{a^2 g(x)} \left(-a^2 g(x) \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + b^2 x \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Formula za posredno odvajanje: 2 točki.*
- *Odvajanje identitete: 2 točki.*
- *Izražanje $g'(x)$: 2 točki.*
- *Vstavljanje in preobrazba: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f(x,y)$ naj bo dana z

$$f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy\,.$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke in ugotovite ali so lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.

Rešitev: Najprej izračunamo parcialna odvoda in ju izenačimo z 0*.*

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6x^2 + 8x - 2y \\ f_y(x,y) &= 2y - 2x \end{aligned}$$

Matrika drugih odvodov je

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x+8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stacionarni točki sta $(0,0)$ *in* $(-1,-1)$*. Za* $(0,0)$ *je*

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ta matrika je pozitivno definitna, torej imamo opravka z lokalnim minimumom. Za $(-1,-1)$ *pa dobimo*

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

V tem primeru matrika ni ne pozitivno ne negativno definitna, torej imamo opravka s sedlom.

Ocenjevanje:

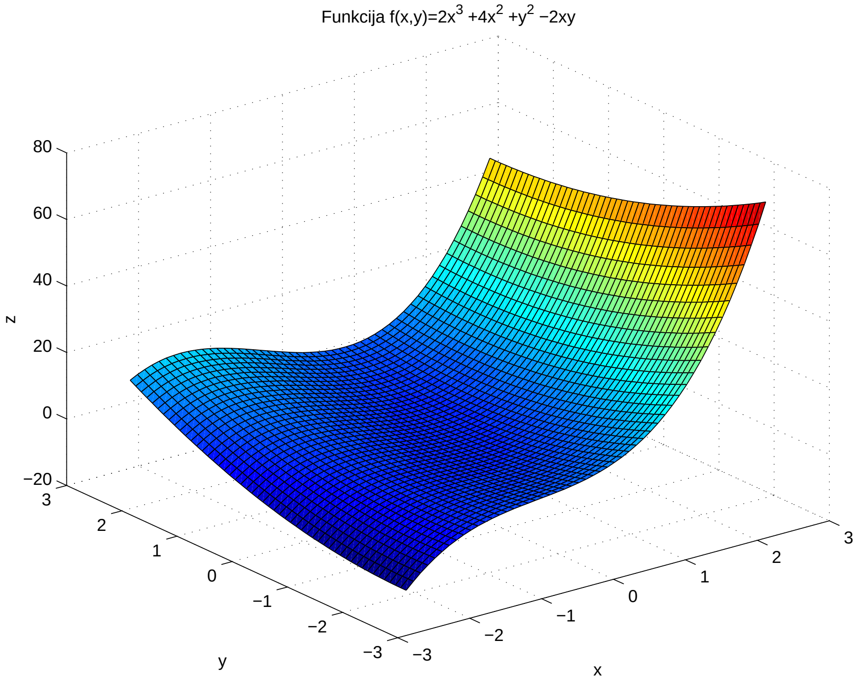
- *Gradient: 2 točke.*
- *Stacionarne točke: 2 točki.*
- *Hessejevi matriki: 2 točki.*
- *Sklepa: 2 točki.*

b. (10) Najdite stacionarne točke funkcije $f(x,y)$ pri dodatnem pogoju $g(x,y) = -2 + x^2 - y = 0$.

Rešitev: Uporabimo Lagrangeovo metodo. Računamo

$$\begin{aligned} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) &= 6x^2 + 8x - 2y - 2\lambda x = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) &= 2y - 2x + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Iz druge enačbe in vezi izrazimo $\lambda = -2(-2+x^2) + 2x$*. Vstavimo v prvo enačbo in dobimo* $4x^3 + 4 = 0$ *z edino realno rešitvijo* $x = -1$*. Sledi, da je* $y = -1$*.*



Sl. Graf funkcije $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$.

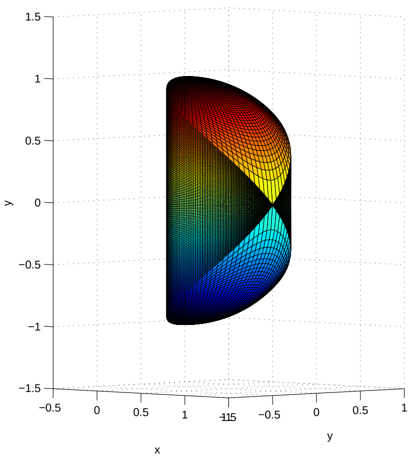
Ocenjevanje:

- *Nastavek za Lagrangea: 2 točki.*
- *Parcialna odvoda: 2 točki.*
- *Upoštevanje vezi: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Rešitvi: 2 točki.*

3. (20) Naj bo G telo, ki nastane kot presek krogle s polmerom $R = 1$ in središčem v izhodišču in neskončnega valja z osjo vzporedno z-osi, ki gre skozi točko $(1/2, 0)$ in ima polmer $R = 1/2$. V matematičnih oznakah je telo

$$G = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}\,.$$

Telo je na sliki 1.



Sl. 1 Telo G.

a. (10) S pomočjo cilindričnih koordinat izračunajte, da je prostornina telesa G enaka

$$V = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\,.$$

Rešitev: V cilindričnih koordinatah mora veljati

$$r^2 + z^2 \leq 1 \qquad \textit{in} \qquad \left(r\cos\phi - \frac{1}{2}\right)^2 + r^2\sin^2\phi \leq \frac{1}{4}\,.$$

Iz druge enačbe sledi, da je

$$r^2 - r\cos\phi = 0\,,$$

torej

$$r = \cos\phi$$

za $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$. *V cilindričnih koordinatah telo opišemo kot*

$$G = \{(r, \phi, z)\colon\ -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq \cos\phi, -\sqrt{1 - r^2} \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}\}\,.$$

Računamo

$$
\begin{aligned}
V &= \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\cos\phi} r\,\mathrm{d}r \int_0^{\sqrt{1-r^2}} dz \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\cos\phi} r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \left(-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3}\right)\Big|_0^{\cos\phi} \\
&= \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1-|\sin\phi|^3\right)\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^3\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Opis v cilindričnih koordinatah: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini in integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Površino dela površine krogle, ki ga izreže neskončen valj, izračunamo po formuli

$$P = 2\int_K \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,,$$

kjer je

$$K = \left\{(x,y)\colon \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\right\}.$$

S pomočjo polarnih koordinat pokažite, da je površina enaka

$$P = 2\pi - 4\,.$$

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate. Računamo

$$
\begin{aligned}
P &= 2\int_K \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\cos\phi} \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}} \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Big|_0^{\cos\phi} \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-|\sin\phi|)\,\mathrm{d}\phi \\
&= 4\int_0^{\pi/2} (1-\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= 4\left(\frac{\pi}{2}-1\right) \\
&= 2\pi-4\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Opis v polarnih koordinatah: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini in integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično z

$$\Phi(u,v) = \left(uv/\sqrt{2}, \sqrt{1-u^2}v/\sqrt{2}, h - v/\sqrt{2}\right)$$

za $0 \leq u \leq 1$ in $0 \leq v \leq \sqrt{2}\,h$.

a. (10) Izračunajte enotski normalen vektor na ploskev v točki

$$\left(\frac{h}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2}\right) .$$

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = \left(\frac{v}{\sqrt{2}}, \frac{-uv}{\sqrt{2}\sqrt{1-u^2}}, 0\right)$$

in

$$\Phi_v = \left(\frac{u}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) .$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = \left(\frac{uv}{2\sqrt{1-u^2}}, \frac{v}{2}, \frac{v}{2\sqrt{1-u^2}}\right) .$$

Dana točka je enaka

$$\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right) .$$

Vstavimo in sledi, da je **n** *kolinearen*

$$\left(\frac{h}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2}\right) .$$

Norma vektorja je $h/\sqrt{2}$.

Ocenjevanje:

- Φ_u: *2 točki.*
- Φ_v: *2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*
- *Norma: 2 točki.*
- *Normalni vektor: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$.

Rešitev: *Računamo*

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{[0,1]\times[0,\sqrt{2}h]} \mathbf{F}\cdot(\Phi_u \times \Phi_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{[0,1]\times[0,\sqrt{2}h]} \left(h - \frac{v}{\sqrt{2}}\right) \frac{v}{2\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{h}{2}\int_{[0,1]\times[0,\sqrt{2}h]} \frac{v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{[0,1]\times[0,\sqrt{2}h]} \frac{v^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \frac{h}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} \int_0^{\sqrt{2}h} v\,\mathrm{d}v - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\int_0^{\sqrt{2}h} v^2\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{\pi h^3}{4} - \frac{\pi h^3}{6} \\
&= \frac{\pi h^3}{12}\,.
\end{aligned}
$$

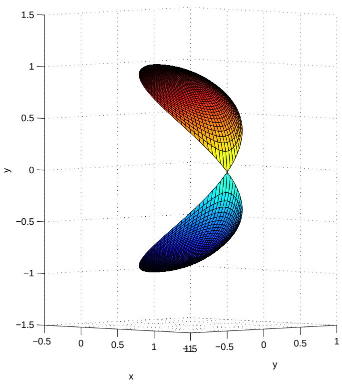
Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Skalarni produkt: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bo G telo, ki nastane kot presek krogle s polmerom $R = 1$ in središčem v izhodišču in neskončnega valja z osjo vzporedno z-osi, ki gre skozi točko $(1/2, 0)$ in ima polmer $R = 1/2$. V matematičnih oznakah je telo

$$G = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}\,.$$

a. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (-2yz, (2x-1)z, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi tisti del povpršine ∂G, ki sovpada z površino krogle. Za normalo vedno izberite vektor, ki kaže iz telesa. Ploskev je na sliki 2a.



Sl. 2a Del površine G, ki sovpada s površino krogle G.

Rešitev: Opazimo, da je $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 1$*. Pretok skozi celotno površino G je enak prostornini G, torej $2\pi/3 - 8/9$. Če je točka (x, y, z) na delu površine G, ki sovpada s površino neskončnega valja, je normalni vektor vedno kolinearen vektorju*

$$\mathbf{n} = \left(x - \frac{1}{2}, y, 0\right)\,,$$

zato je

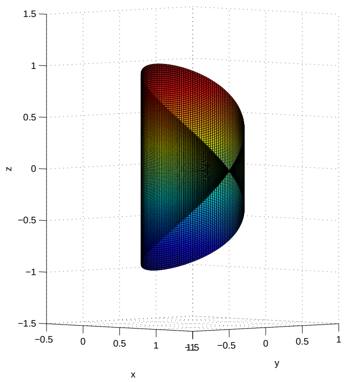
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2yz\left(x - \frac{1}{2}\right) + y(2x-1)z = 0\,.$$

Prispevek drugega dela ploskve je enak 0, zato je celoten pretok enak $2\pi/3 - 8/9$.

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Normalni vektor na ploskev: 2 točki.*
- *Skalarni produkt: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok skozi tisti del površine ∂G telesa G, ki sovpada s površino neskončnega valja. Za normalo vedno izberite vektor, ki kaži iz telesa. Ploskev je na sliki 2b.



Sl. 2b Del površine G, ki sovpada s plaščem valja.

Rešitev: Izračunamo $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 3$. *Celoten pretok skozi površino G je tako enak $3V = 2\pi - 8/3$. V točki (x, y, z) na površini krogle je enotski normalni vektor kar (x, y, z), tako da je $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Pretok skozi ta del ploskve bo tako kar enak površini dela, ki sovpada s površino krogle, ta pa je $P = 2\pi - 4$. Iskani pretok bo tako*

$$\left(2\pi - \frac{8}{3}\right) - (2\pi - 4) = \frac{4}{3}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Normalni vektor na ploskev: 2 točki.*
- *Skalarni produkt: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*