FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

7. februar 2013

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Definirajte funkcijo $F(x,y)$ s predpisom

$$F(x,y) = \operatorname{arctg}(x+cy) - \operatorname{arctg}(x-cy)\,.$$

a. (10) Izračunajte

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{(x+cy)^2+1} - \frac{1}{(x-cy)^2+1}$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{2(x+cy)}{((x+cy)^2+1)^2} + \frac{2(x-cy)}{((x-cy)^2+1)^2}\,.$$

Računamo

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{c}{(x+cy)^2+1} + \frac{c}{(x-cy)^2+1}$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{2c^2(x+cy)}{((x+cy)^2+1)^2} + \frac{2c^2(x-cy)}{((x-cy)^2+1)^2}\,.$$

Sledi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- F_x: *2 točki.*
- F_{xx}: *2 točki.*
- F_y: *2 točki.*
- F_{yy}: *2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $f(u)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija ene spremenljivke in naj bo

$$F(x,y) = f(x+cy) - f(x-cy)\,.$$

Izračunajte

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x+cy) - f'(x-cy)$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''(x+cy) - f''(x-cy)\,.$$

Računamo

$$\frac{\partial F}{\partial y} = cf'(x+cy) + cf'(x-cy)$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = c^2 f''(x+cy) + c^2 f''(x-cy)\,.$$

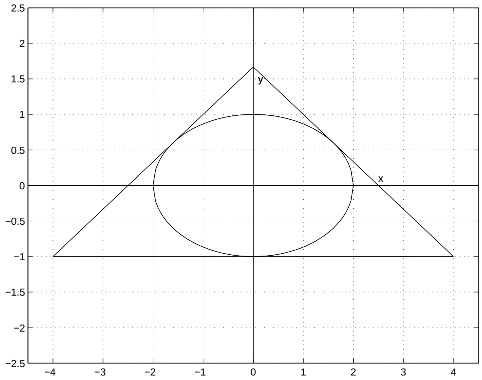
Ocenjevanje:

- F_x: *2 točki.*
- F_{xx}: *2 točki.*
- F_y: *2 točki.*
- F_{yy}: *2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Elipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

očrtamo trikotnik kot na Sliki 1, tako da je osnovnica vzporedna z osjo x.



Sl. 1 Trikotnik očrtan elipsi.

Označite z x in y odseka na koordinatnih oseh. Odseka ustrezata enačbi

$$g(x,y) = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1\,,$$

ploščina trikotnika pa je dana z

$$P = f(x,y) = \frac{x(y+b)^2}{y}\,.$$

Z Lagrangeovo metodo želimo poiskati očrtan trikotnik z najmanjšo možno ploščino.

a. (10) Pokažite, da je

$$2x(y+b) + 2\lambda = 0\,.$$

Namig: Prvo enačbo pomnožite z x, drugo z y in ju seštejte.

Rešitev: Po Lagrangeu sestavimo funkcijo

$$F(x,y) = \frac{x(y+b)^2}{y} - \lambda\left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2}\right)\,.$$

Parcialna odvoda te funkcije izenačimo z 0 *in dobimo*

$$\frac{(y+b)^2}{y} + \frac{2\lambda a^2}{x^3} = 0 \quad in \quad x - \frac{xb^2}{y^2} + \frac{2\lambda b^2}{y^3} = 0\,.$$

Prvo enačbo pomnožimo z x, drugo z y in ju seštejemo. Z upoštevanjem $g(x,y) = 1$ dobimo

$$\frac{x(y+b)^2}{y} + xy - \frac{xb^2}{y} + 2\lambda = 0\,.$$

Poenostavimo in sledi

$$2x(y+b) + 2\lambda = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *$F(x,y)$: 2 točki.*
- *F_x: 2 točki.*
- *F_y: 2 točki.*
- *Množenje in seštevanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Poiščite najmanjšo možno ploščino očrtanega trikotnika.

Namig: V enačbi $F_x = 0$ vstavite 2λ iz prvega dela naloge.

Rešitev: V enačbi $F_x = 0$ vstavimo 2λ iz prvega dela naloge. Sledi

$$\frac{(y+b)^2}{y} = \frac{2x(y+b)a^2}{x^3}\,.$$

Pokrajšamo in dobimo

$$\frac{y+b}{y} = \frac{2a^2}{x^2} = 2 - \frac{2b^2}{y^2} = \frac{2(y+b)(y-b)}{y^2}\,.$$

Končno sledi

$$1 = \frac{2(y-b)}{y}$$

ali $y = 2b$. Iz enačbe $g(x,y) = 1$ sledi še

$$\frac{a^2}{x^2} = 1 - \frac{b^2}{4b^2}$$

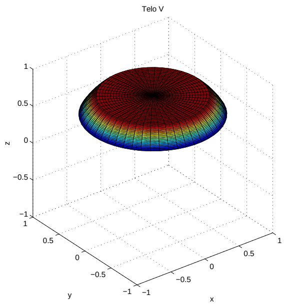
ali $x = 2a/\sqrt{3}$. Najmanjša ploščina je

$$f(2a/\sqrt{3}, 2b) = 3\sqrt{3}ab\,.$$

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Poenostavljanje: 2 točki.*
- *Zveza med x in y: 2 točki.*
- *Upoštevanje omejitev: 2 točki.*
- *Najmanjša ploščina: 2 točki.*

3. (20) Telo V naj bo rezina krogle $K = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ med višinama $z = a$ in $z = b$ za $0 < a < b < 1$. Telo je prikazano na sliki 2.



Sl. 2 Rezina krogle med višinama $z = a$ in $z = b$.

a. (10) Predpostavite, da je masna gostota telesa konstantno enaka ρ. Izračunajte masni vztrajnostni moment telesa V okrog osi z.

Rešitev: Z uvedbo cilindričnih koordinat računamo

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \rho \int_V (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_a^b \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^2\, r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{4}\pi\rho \int_a^b (1-z^2)^2 \mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{4}\pi\rho\,(z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{z^5}{5})\Big|_a^b \\ &= \frac{\pi\rho}{2}\,((b-a) - \frac{2(b^3-a^3)}{3} + \frac{b^5-a^5}{5})\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s cilindričnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še površino plašča rezine krogle (brez krogov, ki jih "odrežeta" ravnini $z = a$ in $z = b$).

Namig: Parametrizirajte ploskev s $\Phi(\phi, z) = (\sqrt{1-z^2}\cos\phi, \sqrt{1-z^2}\sin\phi, z)$.

Rešitev: Sledimo namigu. Za parametra bo veljalo $0 \leq \phi \leq 2\pi$ *in* $a \leq z \leq b$. *Računamo*

$$\Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-z^2}\sin\phi \\ \sqrt{1-z^2}\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{in} \qquad \Phi_z = \begin{pmatrix} -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\phi \\ -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sledi

$$\Phi_\phi \times \Phi_z = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2}\cos\phi \\ \sqrt{1-z^2}\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

ali

$$|\Phi_\phi \times \Phi_z| = 1 - z^2 + z^2 = 1\,.$$

Površina je $2\pi(b-a)$.

Ocenjevanje:

- *Območje za parametre: 2 točki.*
- Φ_ϕ*: 2 točki.*
- Φ_z*: 2 točki.*
- $|\Phi_\phi \times \Phi_z|$*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično z

$$\Phi(u,v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u - \frac{\sqrt{2}}{2}v, \sin u, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos u + \frac{\sqrt{2}}{2}v\right)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $0 \leq v \leq h$.

a. (10) Izračunajte normalni vektor na ploskev v točki $(-\sqrt{2}h/4, 1, \sqrt{2}h/4)$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u, \cos u, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u\right)$$

in

$$\Phi_v = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) .$$

Dobimo

$$\Phi_u \times \Phi_v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u, \sin u, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos u\right) .$$

Pripadajoča točka je $(\pi/2, h/2)$. *Normala je*

$$\mathbf{n} = (0,1,0) \ .$$

Ocenjevanje:

-
-
-
-
-

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (-y, x, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja S skozi ploskev $\mathcal{S}$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \\
&= \int_{[0,2\pi]\times[0,h]} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \cdot v + (\frac{1}{2}\cos u + \frac{1}{2}v)\cos u\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{h}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi h}{2} \, .
\end{aligned}$$

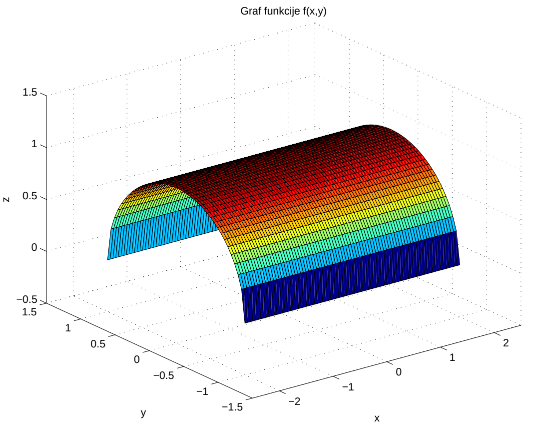
Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Množenje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

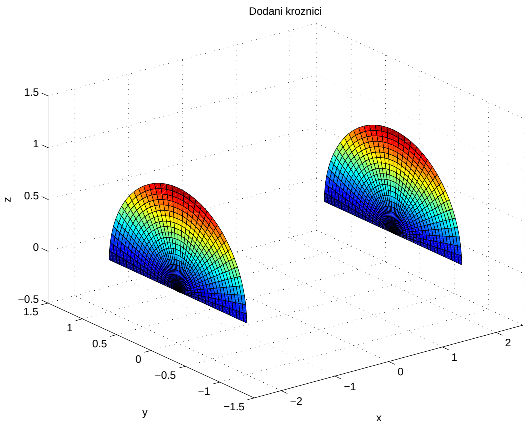
5. (20) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F} = (x, y, 0)$. Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo graf funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$$

na pravokotniku $-h \leq x \leq h$ in $-1 \leq y \leq 1$. Za normalo izberite vektorje s pozitivno z-komponento. Ploskev $\mathcal{S}$ je prikazana na sliki 3a.



Slika 3a Izgled ploskve $\mathcal{S}$.



Slika 3b Dodana polkroga.

a. (10) Izračunajte pretok skozi vsakega od polovice krogov, ki sta v ravninah $x = -h$ in $x = h$, imata središči v $(-h, 0, 0)$ in $(h, 0, 0)$, polmera $R = 1$ in ležita nad xy-ravnino. Polkroga sta prikazana na sliki 2b. Normala na prvi polkrog naj bo $(-1, 0, 0)$, normala na drugi pa $(1, 0, 0)$.

Rešitev: Normala na drugi polkrog je $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$*, torej je* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = h$*. Pretok je torej* $\pi/2 \cdot h$*. Pretok skozi drugi polkrog je enak.*

Ocenjevanje:

- *Normala: 2 točki.*
- *Skalarni produkt: 2 točki.*
- *Konstantnost skalarnega produkta: 2 točki.*
- *Pretok v takem primeru: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte pretok $\mathbf{F}$ skozi ploskev, ki je graf funkcije $f(x, y)$.

Rešitev: Ugotovimo, da je $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2$*. Ugotovimo, da je pretok skozi pravokotnik v* xy*-ravnini enak* 0*. Če polkrožen valj še "zapremo" s polovicama krogov na vsakem koncu, dobimo polovico valja* V*. Po Gaussu je*

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dx\, dy\, dz = 2\pi h\,.$$

Odvzeti moramo še pretoka skozi polkroga, tako da je končni pretok enak πh*.*

Ocenjevanje:

- *Zapiranje ploskve: 2 točki.*
- *Pretok skozi pravokotnik: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Pretok skozi polkroga: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*