FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

25. januar 2000

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo u zvezno parcialno odvedljiva funkcija na neki okolici U točke (x_0, y_0). Predpostavite, da za $(x, y) \in U$ velja $u_y(x, y) \neq 0$.

a. (10) Naj za $(x, y) \in U$ velja

$$-\frac{u_x(x,y)}{u_y(x,y)} = f(x,y)\,.$$

Pokažite, da na neki okolici V točke x_0 obstaja odvedljiva funkcija $y(x)$, taka da je $y(x_0) = y_0$ in za $x \in V$

$$y'(x) = f(x, y(x))\,.$$

Rešitev: Ker je u zvezno parcialno odvedljiva in velja $u_y(x_0, y_0) \neq 0$, po izreku o implicitni funkciji obstaja na neki okolici V točke x_0 funkcija $y(x)$, za katero je $y(x_0) = y_0$ in $u(x, y(x)) = 0$. To zadnjo identiteto odvajamo in dobimo

$$u_x(x, y(x)) + u_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0\,.$$

Izračunamo

$$y'(x) = -\frac{u_x(x, y(x))}{u_y(x, y(x))} = f(x, y(x))\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je u funkcija za uporabo pri implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Preverjanje predpostavk izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Citiranje izreka: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Upoštevanje zveze med f in u: 2 točki.*

b. (10) Naj bo zvezno odvedljivo polje $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ v $\mathbb{R}^2$ potencialno in naj za neko točko (x_0, y_0) velja $F_2(x_0, y_0) \neq 0$. Pokažite, da na neki okolici V točke x_0 obstaja funkcija $y(x)$, taka da je $y(x_0) = y_0$ in velja $F_1(x, y(x)) + F_2(x, y(x))y'(x) = 0$.

Rešitev: Če je polje potencialno, potem obstaja funkcija u, taka da je $\mathbf{F} = \nabla u$. Ker je $F_2(x_0, y_0) \neq 0$, na neki okolici U točke (x_0, y_0) velja $u_y \neq 0$. Po a. delu naloge potem na neki okolici V točke x_0 obstaja funkcija $y(x)$ z lastnostjo $y(x_0) = y_0$ in

$$y'(x) = -\frac{u_x(x, y(x))}{u_y(x, y(x))} = -\frac{F_1(x, y(x))}{F_2(x, y(x))}\,.$$

To zadnje je že želena enačba.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da potencial igra vlogo u: 2 točki.*
- *Preverjanje predpostavk za implicitno funkcijo za potencial: 2 točki.*
- *Obstoj y: 2 točki.*
- *Zapis enačbe, ki ji ustreza $y(x)$: 2 točki.*
- *Končna enačba: 2 točki.*

2. (20) Naj bo f zvezno odvedljiva funkcija na območju $G = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$. Definiramo funkcijo

$$u(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$$

za $0 \leq r \leq 1$ in $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

a. (10) Površina grafa funkcije f je dana z formulo

$$P = \int_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Pokažite, da je

$$P = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \sqrt{1 + u_r^2 + \frac{u_\phi^2}{r^2}}\; r\,\mathrm{d}r\,.$$

Namig: Najprej izrazite f_x in f_y z u_r in u_ϕ.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$u_r = f_x \cdot \cos\phi + f_y \sin\phi$$

in

$$u_\phi = -r f_x \cdot \sin\phi + r f_y \cdot \cos\phi\,.$$

Delimo drugo enačbo z r, kvadriramo in seštejemo. Dobimo

$$u_r^2 + \frac{u_\phi^2}{r^2} = f_x^2 + f_y^2\,.$$

Zdaj lahko v integral za površino uvedemo polarne koordinate in dobimo zahtevano formulo.

Ocenjevanje:

- *Prvo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Deljenje z r in kvadriranje: 2 točki.*
- *Uvedba novih spremenljivk: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte površino grafa funkcije

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

nad območjem G.

Rešitev: Izračunamo

$$u(r,\phi) = r^2 \cos 2\phi\,.$$

Sledi

$$u_r(r,\phi) = 2r\cos 2\phi \qquad \text{in} \qquad u_\phi(r,\phi) = -2r^2 \sin 2\phi\,.$$

Računamo

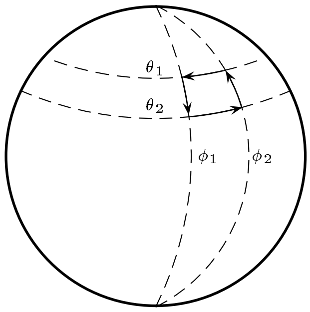
$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \sqrt{1 + u_r^2 + \frac{u_\phi^2}{r^2}}\, r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^4 \sqrt{1+t}\, \frac{\mathrm{d}t}{8} \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2(1+t)^{3/2}}{3}\Big|_0^4 \\
&= \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Definicija u: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Polarne koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Dano naj bo vektorsko polje $\mathbf{F} = (2x - y, -yz^2, -y^2z)$.

a. (10) Izračunajte krivuljni integral po robu dela krogle s polmerom $R = 1$ med zemjepisnima širinama θ_1 in θ_2 in zemljepisnima dolžinama ϕ_1 in ϕ_2. Orientacija naj bo v smeri nasprotni urinemu kazalcu kot na spodnji sliki 1.



Slika 1 Del površine krogle, kjer integriramo.

Rešitev: Krivuljni integral bo po Stokesovem izreku enak pretoku rotorja skozi del ploskve, ki ga omejuje krivulja. Izračunamo

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} -2yz + 2yz \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{k}\,.$$

Če si izberemo za normalo vedno vektor, ki kaže iz krogle, bo krivuljni integral enak pretoku tudi po predznaku. Integral pa bo ploščina projekcije dela krogle na xy-ravnino. Vidimo lahko, da bo ta ploščina kar

$$\frac{\phi_2 - \phi_1}{2\pi} \cdot \pi(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izračun rotorja: 2 točki.*
- *Ideja s Stokesovim izrekom: 2 točki.*
- *Opazka s ploščino: 2 točki.*
- *Izračun ploščine: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še krivuljni integral vektorskega polja $\mathbf{F}$ po ekvatorju v smeri nasprotni urinemu kazalcu.

Rešitev: Spet uporabimo Stokesov izrek. Na krivuljno napnemo kar krog v ravnini in dobimo razultat π.

Ocenjevanje:

- *Kakršnkoli smiseln razmislek: 10 točk.*

4. (20) Naj bo ω število z $|\omega| < 1$ in naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \omega & \sqrt{1-\omega^2} \\ -\sqrt{1-\omega^2} & \omega \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko rešitev sistema enačb

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v}\,.$$

Rešitev: Najprej poiščemo lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}$*. Računamo*

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \omega-\lambda & \sqrt{1-\omega^2} \\ -\sqrt{1-\omega^2} & \omega-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\omega\lambda + 1\,.$$

Lastni vrednosti sta $\lambda_1 = \omega + i\sqrt{1-\omega^2}$ *in* $\lambda_2 = \omega - i\sqrt{1-\omega^2}$*. Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti* λ_1 *je* $\mathbf{z} = (1, i)$*. Linearno neodvisni rešitvi bosta realni in imaginarni del*

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{z} = e^{\omega t + i\sqrt{1-\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Označimo $\delta = \sqrt{1-\omega^2}$*. Dobimo*

$$\mathbf{v}_1(t) = e^{\omega t}\begin{pmatrix} \cos\delta t \\ -\sin\delta t \end{pmatrix} \qquad \mathit{in} \qquad \mathbf{v}_2(t) = e^{\omega t}\begin{pmatrix} \sin\delta t \\ \cos\delta t \end{pmatrix}.$$

Ti linearno neodvisni rešitvi že ustrezata zahtevam za fundamentalno matriko rešitev, zato je

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\omega t}\begin{pmatrix} \cos\delta t & \sin\delta t \\ -\sin\delta t & \cos\delta t \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Lastni vrednosti: 2 točki*
- *Lastni vektor: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Fundamentalna matroka rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev nehomogene enačbe

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} e^{\omega t} \\ e^{\omega t} \end{pmatrix}$$

pri začetnem pogoju $\mathbf{v}(0) = (0, 0)$.

Rešitev: Po formuli dobimo partikularno rešitev kot

$$\mathbf{v}_p = \int_0^t \mathbf{Y}(t-s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Z integriranjem dobimo

$$\mathbf{v}_p(t) = \frac{e^{\omega t}}{\delta} \begin{pmatrix} 1 + \sin \delta t - \cos \delta t \\ -1 + \sin \delta t + \cos \delta t \end{pmatrix} .$$

Splošna rešitev bo oblike

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 \, .$$

Vstavimo $t = 0$ *in dobimo* $c_1 = 0$ *in* $c_2 = 0$.

Ocenjevanje:

- *Formula za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbi za konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

5. (20) Funkcija f na $[-\pi, \pi]$ naj bo dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{za } -\pi \le x \le -\pi/2 \\ x & \text{za } -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \text{za } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$$

a. (10) Utemeljite, da je za $-\pi \le x \le \pi$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin(2m+1)x}{(2m+1)^2}\,.$$

Rešitev: Funkcija je liha, zato je $a_n = 0$ za vse $n \ge 0$. Za b_n računamo

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} x\sin n(\pi - x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,\mathrm{d}x \qquad \textit{V drugem integralu: } u = \pi - x \\
&= \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos(n\pi/2)}{2n} + \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}\right]
\end{aligned}$$

Vidimo, da za je za sode n integral enak 0, za $n = 2m+1$ pa je

$$b_n = \frac{4}{\pi(2m+1)^2}(-1)^m\,.$$

Funkcija f je na $[-\pi, \pi]$ zvezna, odsekoma zvezno odvedljiva in velja $f(\pi) = f(-\pi) = 0$, torej Fourierova vrsta za f povsod konvergira proti funkcijski vrednosti.

Ocenjevanje:

- *Lihost: 2 točki.*
- *Razbitje integrala na dva dela: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Sodi, lihi n: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\,.$$

Rešitev: V Fourierovo vrsto za $f(x)$ vstavimo $x = \pi/2$. Računamo

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m \sin((2m+1)\pi/2)}{(2m+1)^2}\\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m \cos m\pi}{(2m+1)^2}\\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(-1)^m}{(2m+1)^2}\\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}
\end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

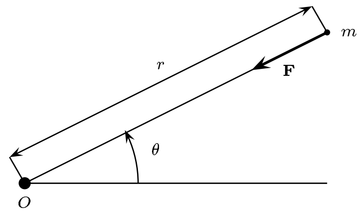
Ocenjevanje:

- *Vstavljanje $\pi/2$: 2 točki.*
- *Pretvorba sinusa: 2 točki.*
- *Predznaki: 2 točki.*
- *Izenačenje z znano vsoto: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

6. (20) Gibanje točkastega telesa v polju centralnih sil opisuje diferencialna enačba

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{F(\frac{1}{u})}{mh^2u^2}\,.$$

Situacija je opisana na sliki 2.



Slika 2 Gibanje točkastega telesa v polju centralnih sil.

Pri tem je $u = 1/r$, θ je kot med fiksno premico in trenutnim položajem, m je masa točkastega telesa in h dana konstanta. Sila na točkasto maso je vedno v smeri vektorja r, ki opisuje trenutni položaj, velikost sile pa je odvisna samo od oddaljenosti od točke O, torej $F = F(r)$.

Predpostavite, da je

$$F(r) = \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^3}$$

za neki konstanti $\alpha > 0$ in $0 < \beta < mh^2$.

a. (10) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Enačbo prepišemo v bolj pregledno obliko

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{\alpha u^2}{mh^2u^2} - \frac{\beta u^3}{mh^2u^2}\,.$$

Pokrajšamo in dobimo nehomogemo linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + \left(1 + \frac{\beta}{mh^2}\right) u = -\frac{\alpha}{mh^2}\,.$$

Najprej poiščemo rešitvi homogene enačbe. Označimo $1 + \frac{\beta}{mh^2} = \omega^2$. *Dobimo rešitvi*

$$u_1 = \cos(\omega\theta) \qquad \textit{in} \qquad u_2 = \sin(\omega\theta)\,.$$

Potrebujemo še partikularno rešitev. Desna stran je konstanta, zato bo tudi partikularna rešitev konstanta. Dobimo

$$u_p = -\frac{\alpha}{mh^2 + \beta}\,.$$

Splošna rešitev je oblike

$$u = u_p + c_1 u_1 + c_2 u_2 \,.$$

Ocenjevanje:

- *Pretvorba enačke na nehomogeno linearno: 2 točki.*
- *Rešitvi homogene enačbe: 2 točki.*
- *Nastavek za nehomogeno enačbo: 2 točki.*
- *Rešitev nehomogene enačbe: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b (10) Poiščite rešitev enačbe pri začetnih pogojih $u(0) = u'(0) = 0$.

Rešitev: V splošni rešitvi moramo izbrati konstanti c_1 in c_2 tako, da bo zadoščeno začetnima pogojema. Dobimo enačbi

$$0 = -\frac{\alpha}{mh^2 + \beta} + c_1 \qquad \mathit{in} \qquad 0 = c_2 \,.$$

Rešitev enačbe je torej

$$u(\theta) = \frac{\alpha}{mh^2 + \beta}(\cos(\omega\theta) - 1) \,.$$

Ocenjevanje:

- *Uporaba nastavka: 2 točki.*
- *Ideja, da je potrebno določiti konstanti: 2 točki.*
- *Enačbi za konstanti: 2 točki.*
- *Konstanti: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*