FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit in kolokvij

22. januar 2010

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkciji $u(x,y)$ in $v(x,y)$ naj bosta za $x>0$ in $-\infty<y<\infty$ dani z

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) \qquad \text{in} \qquad v(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

a. (10) Pokažite, da je

$$u_x(x,y)=v_y(x,y).$$

b. (10) Izračunajte $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)$.

2. (20) Funkciji $x(t)$ in $y(t)$ naj za $t \geq 0$ ustrezata enačbama

$$\dot{x} = (a - by)x \qquad \text{in} \qquad \dot{y} = (-c + dx)y$$

za dane pozitivne konstante a, b, c, d. Definirajte funkcijo $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ z

$$F(x, y) = c \log x - dx + a \log y - by\,.$$

a. (10) Naj bo

$$h(t) = F(x(t), y(t))\,.$$

Izračunajte $\dot{h}(t)$.

b. (10) Za točko $(x_0, y_0) = (x_0, a/b)$ naj velja $F(x_0, y_0) = \alpha$ in $x_0 > c/d$. Pokažite, da v okolici točke y_0 obstaja funkcija $g(y)$, da velja $g(y_0) = x_0$ in $F(g(y), y) = \alpha$. Pokažite, da ima g v točki y_0 lokalni maksimum.

3. (20) Območje G naj bo krog dan s predpisom

$$G = \{(x, y)\colon (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}\,.$$

za $a \geq 0$.

a. (10) Z uvedbo polarnih koordinat izračunajte

$$\int_G x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Kot znano upoštevajte, da je

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6 \phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{5\pi}{16}\,.$$

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_G \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\,.$$

4. (20) Vektorsko polje $\mathbf{F}$ v prostoru naj bo dano z $\mathbf{F} = (x^2z, xy^2, z^2)$.

a. (10) Krivulja $\mathcal{C}$ naj bo dana kot presečišče ravnine $x + y + z = 1$ in neskončnega valja $x^2 + y^2 = a^2$. Krivuljo orientiramo v smeri nasprotni urinemu kazalcu, če jo gledamo od zgoraj. Izračunajte krivuljni integral

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,.$$

b. (10) Naj bo $\mathcal{S}$ del neskončnega valja $x^2 + y^2 = a^2$ za $0 \leq z \leq b$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$, s tem da vedno izberete normalo, ki kaže iz valja.

5. (20) Skozi kroglo s polmerom R zvrtamo okroglo luknjo s polmerom $R_1 < R$, tako da gre os luknje skozi središče krogle. Mislimo si, da je os luknje v smeri osi z, središče krogle pa v izhodišču koordinatnega sistema. Krogla naj ima masno gostoto $\rho = 1$. Preluknjano kroglo označimo s K_0.

a. (10) Izračunajte masni vztrajnostni moment te "preluknjane" krogle, torej

$$\int_{K_0} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

b. (10) Izračunajte prostornino preluknjane krogle.