FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit in kolokvij

19. januar 2011

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo funkcija $f(r)$ za $r > 0$ dvakrat zvezno odvedljiva. Za $x^2 + y^2 > 0$ definiramo funkcijo

$$u(x, y) = f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) .$$

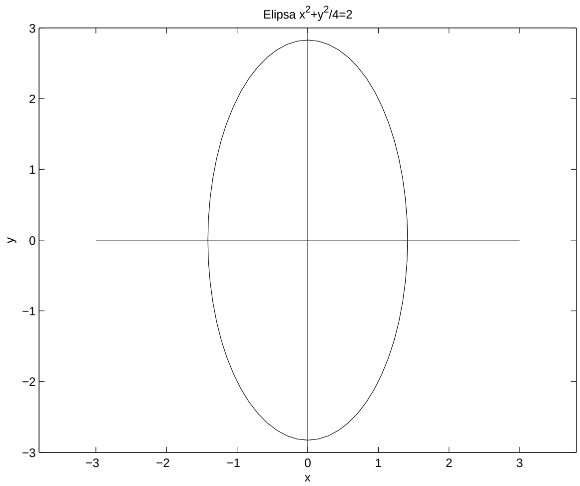
a. (10) Izračunajte $u_{xx}(x, y)$.

b. (10) Naj bo $f(r) = \log(r)$. Izračunajte

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) .$$

2. (20) Elipsa na sliki 1 je dana z enačbo

$$g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} = 2\,.$$



Slika 1 Elipsa $x^2 + y^2/4 = 2$.

a. (10) Poiščite točko na elipsi, ki bi lahko bila najbližje točki $(0, 3/2)$, torej minimum funkcije

$$f(x,y) = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$$

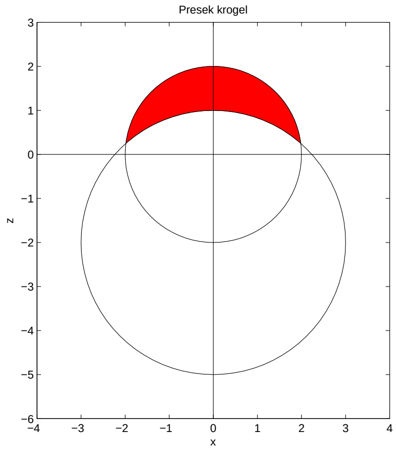
pri pogoju $g(x,y) = 2$. Primera, ko je $\lambda = 1$ in $\lambda \neq 1$ obravnavajte posebej.

b. (10) Poiščite točko na elipsi, ki bi lahko bila najdlje od točke $(0, 3/2)$, torej maksimum funkcije

$$f(x,y) = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$$

pri pogoju $g(x,y) = 2$. Primera, ko je $\lambda = 1$ in $\lambda \neq 1$ obravnavajte posebej.

3. (20) Kroglo K_1 s polmerom $R = 2$ in središčem v izhodišču presekamo s kroglo K_2 s polmerom $R = 3$ in izhodiščem v točki $(0, 0, -2)$. Zanima nas del K_1 zunaj K_2, torej del, ki je osenčen na sliki 2.



Slika 2 Del krogle, ki nas zanima, je osenčen.

Osenčeni del krogle omejujeta grafa funkcij

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \qquad \text{in} \qquad g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} - 2$$

na krogu $K = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \le \left(\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)^2\}$.

a. (10) Izračunajte

$$\int_K g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

b. (10) Izračunajte prostornino osenčenega dela krogle.

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana v parametrični obliki z

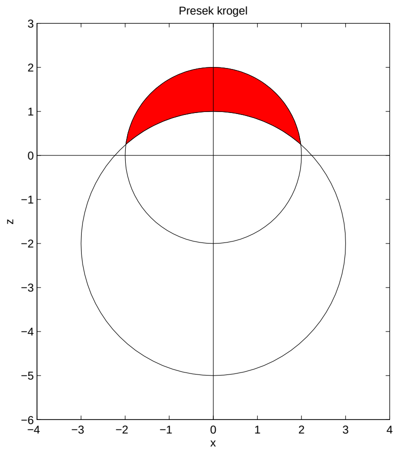
$$\Phi(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, \sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1} \right)$$

za $0 < a \leq u \leq b$ in $0 \leq v \leq 2\pi$.

a. (10) Izračunajte enotski normalni vektor na ploskev $\mathcal{S}$ v točki $\Phi(\sqrt{2}a, \pi/2) = (0, \sqrt{2}a, 1)$.

b. (10) Naj bo $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, z)$. Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi ploskev $\mathcal{S}$ v smeri normale s pozitivno z komponento.

5. (20) Kroglo K_1 s polmerom $R = 2$ in središčem v izhodišču presekamo s kroglo K_2 s polmerom $R = 3$ in izhodiščem v točki $(0, 0, -2)$. Zanima nas del K_1 zunaj K_2, torej del, ki je osenčen na sliki 3. Naj bo vektorsko polje dano z $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$.



Slika 3 Del krogle, ki nas zanima, je osenčen.

a. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi tisti del površine krogle K_1, ki ni v K_2, v smeri zunanje normale.

b. (10) S pomočjo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi tisti del površine K_2, ki je vsebovan v K_1.