FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

20. januar 2012

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bosta $f(u)$ in $g(v)$ odvedljivi funkciji. Definiramo funkciji

$$F(x,y) = f\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{in} \qquad G(x,y) = g\left(\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

a. (10) Izračunajte

$$F_xG_x + F_yG_y\,.$$

Rešitev: Označimo

$$u(x,y) = \sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \textit{in} \qquad v(x,y) = \sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Z odvajanjem sledi

$$u_x = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \textit{in} \qquad u_y = \frac{\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

ter

$$v_x = -\frac{\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \textit{in} \qquad v_y = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Po pravilih za odvajanje sestavljenih funkcij računamo

$$F_x = f'\cdot u_x \qquad \textit{in} \qquad F_y = f'\cdot u_y$$

ter

$$G_x = g'\cdot v_x \qquad \textit{in} \qquad G_y = g'\cdot v_y\,.$$

Sledi

$$F_xG_x + F_yG_y = f'g'\left(u_xv_x + u_yv_y\right) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Parcialna dovoda u: 2 točki.*
- *Parcialna odvoda v: 2 točki.*
- *Parcialna odvoda F: 2 točki.,*
- *Parcialna odvoda G: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bosta $\phi(x)$ in $\psi(x)$ funkciji, za kateri je

$$F(x,\phi(x)) = 1 \qquad \text{in} \qquad G(x,\psi(x)) = 1\,.$$

Izračunajte $\phi'(x)\psi'(x)$.

Rešitev: Identiteti odvajamo po x in dobimo

$$F_x + F_y\cdot\phi' = 0 \qquad \textit{in} \qquad G_x + G_y\cdot\psi' = 0\,.$$

Sledi

$$\phi' \cdot \psi' = \left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\left(-\frac{G_x}{G_y}\right).$$

Iz prvega dela naloge dobimo

$$\frac{F_x}{F_y} = -\frac{u_x}{u_y} \qquad \text{in} \qquad \frac{G_x}{G_y} = -\frac{v_x}{v_y}.$$

Sledi

$$\phi' \cdot \psi' = \frac{u_x v_x}{u_y v_y} = -1.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z odvajanjem: 2 točki.*
- *Odvod prve identitete: 2 točki.*
- *Odvod druge identitete: 2 točki.*
- *Vstavljanje F_x, F_y, G_x, G_y: 2 točki.*
- *Poenostavljanje in rezultat: 2 točki.*

2. (20) Naj bo

$$g(x,y) = x^2y + \frac{x^3}{3}\,.$$

a. (10) Definirajte

$$f(x,y) = xy + \frac{\sqrt{2}x^2}{2}\,.$$

Poiščite x in y, za katera ima lahko funkcija $f(x,y)$ minimum pri dodatnem pogoju $g(x,y) = 1$.

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo funkcijo

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

in njena parcialna odvoda izenačimo z 0. *Dobimo enačbi*

$$y + \sqrt{2}x - \lambda(2xy + x^2) = 0 \qquad \textit{in} \qquad x - \lambda x^2 = 0\,.$$

Ker mora biti $x \neq 0$ *zaradi pogoja, iz druge enačbe sledi* $\lambda x = 1$. *Vstavimo v prvo in dobimo*

$$y + \sqrt{2}x - 2y - x = 0\,.$$

Sledi $y = x(\sqrt{2} - 1)$. *Iz pogoja* $g(x,y) = 1$ *sledi*

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{3\sqrt{2} - 2}}.$$

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Krajšanje in urejanje: 2 točki.*
- *Uporaba robnega pogoja: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo

$$f(x,y) = xy + \frac{(\sqrt{2}+1)x^2}{2}\,.$$

Poiščite x in y, za katera ima lahko funkcija $f(x,y)$ minimum pri dodatnem pogoju $g(x,y) = 1$.

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo funkcijo

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

in njena parcialna odvoda izenačimo z 0. *Dobimo enačbi*

$$y + (\sqrt{2}+1)x - \lambda(2xy + x^2) = 0 \qquad \textit{in} \qquad x - \lambda x^2 = 0\,.$$

Ker mora biti $x \neq 0$ *zaradi pogoja, iz druge enačbe sledi* $\lambda x = 1$. *Vstavimo v prvo in dobimo*

$$y + (\sqrt{2} + 1)x - 2y - x = 0\,.$$

Sledi $y = \sqrt{2}x$. *Iz pogoja* $g(x, y) = 1$ *sledi*

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{1 + 3\sqrt{2}}}\,.$$

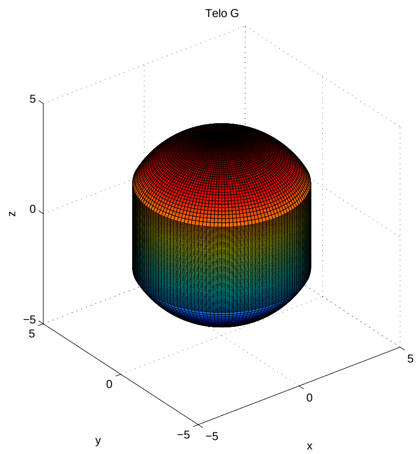
Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Krajšanje in urejanje: 2 točki.*
- *Uporaba robnega pogoja: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo $0 < a < b$. Telo G naj bo presek krogle s polmerom b in središčem v izhodišču in neskončnega valja s polmerom a in osjo, ki sovpada z osjo z. V matematičnih oznakah je

$$G = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, x^2 + y^2 \leq a^2\}\,.$$

Telo je na sliki 1.



Sl. 1 Telo G.

a. (10) Pokažite, da je prostornina telesa G enaka

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(b^3 - (b^2 - a^2)^{3/2}\right)\,.$$

Rešitev: Vpeljemo clilindrične koordinate. Telo G v cilindričnih koordinatah opišemo kot

$$G = \{(r, \phi, z)\colon 0 \leq \phi \leq 2\pi, r \leq a, -\sqrt{b^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{b^2 - r^2}\}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a r\,\mathrm{d}r \int_{-\sqrt{b^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}} \mathrm{d}z \\
&= 4\pi \int_0^a r\sqrt{b^2 - r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= 4\pi \cdot \left(-\frac{(b^2 - r^2)^{3/2}}{3}\right)\Big|_0^a \\
&= \frac{4\pi}{3}\left(b^3 - (b^2 - a^2)^{3/2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Privzemite, da ima telo masno gostoto ρ. Izračunajte masni vztrajnostni moment telesa okrog osi z, torej integral

$$I_{zz} = \int_G \rho(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Kot znano privzemite

$$\int r^3\sqrt{b^2 - r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{15}\left(b^2 - r^2\right)^{3/2}\left(2b^2 + 3r^2\right)\,.$$

Rešitev: Spet uvedemo cilindrične koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_G \rho(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a r^3\,\mathrm{d}r \int_{-\sqrt{b^2-r^2}}^{\sqrt{b^2-r^2}} \mathrm{d}z \\
&= 4\pi\rho \int_0^a r^3\,\sqrt{b^2 - r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= 4\pi\rho \cdot \left(-\frac{1}{15}\left(b^2 - r^2\right)^{3/2}\left(2b^2 + 3r^2\right) a\right)\Bigg|_0^a \\
&= \frac{4\pi\rho}{15}\left(2b^5 - (b^2 - a^2)^{3/2}(2b^2 + 3a^2)\right)\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana z

$$\Phi(u,v) = (u(1-v), -(1-u)(1-v), -v) \ .$$

za $0 \le u \le 1$ in $0 \le v \le 1$.

a. (10) Pokažite, da je enotski normalen vektor na ploskev $\mathcal{S}$ v vsaki točki na ploskvi enak.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = (1-v, 1-v, 0) \qquad \textit{in} \qquad \Phi_v = (-u, 1-u, -1) \ .$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = (-1+v, 1-v, 1-v) \ .$$

Normalen enotski vektor bo v vsaki točki kolinearen vektorju $(-1,1,1)$*, torej bo*

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ .$$

Ocenjevanje:

- *Φ_u: 2 točki.*
- *Φ_v: 2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*
- *Norma: 2 točki.*
- *Enotska normala in sklep: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F}(x,y,z) = (-zy, zx, z^2)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{[0,1]\times[0,1]} \mathbf{F}\cdot(\Phi_u \times \Phi_v)\,\mathrm{d}u, \mathrm{d}v \\
&= \int_{[0,1]\times[0,1]} \big(-(1-u)v(1-v)^2 - uv(1-v)^2 + v^2(1-v)\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{[0,1]\times[0,1]} \big(-v(1-v)^2 + v^2(1-v)\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= 0
\end{aligned}$$

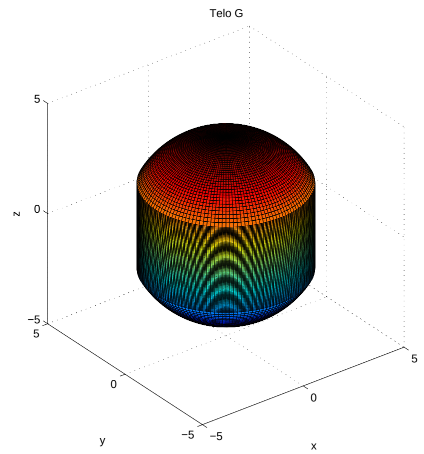
Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Skalarni produkt: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bo $0 < a < b$. Telo G naj bo presek krogle s polmerom b in središčem v izhodišču in neskončnega valja s polmerom a in osjo, ki sovpada z osjo z. V matematičnih oznakah je

$$G = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 \le b^2, x^2 + y^2 \le a^2\}\,.$$

Telo je na sliki 2.



Sl. 2 Telo G.

a. (10) Naj bo $\mathbf{F}(x, y, z) = (-zy, zx, z)$. Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi zgornjo krogelno kapico, ki pokriva telo G. Za normalo vedno vzemite vektor, ki kaže iz telesa G.

Rešitev: Opazimo, da je $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 1$. *Na plašču valja bo normala* $\mathbf{n}$ *vedno kolinearna* $(x, y, 0)$. *To pomeni, da bo na plašču valja* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$. *Pretok skozi celotno površino telesa* G *je po Gaussovem izreku enaka prostornini* G*, ki je*

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(b^3 - (b^2 - a^2)^{3/2}\right)\,.$$

Zaradi simetrije sta pretoka skozi zgornjo in spodnjo krogelno kapico enaka. Iskani pretok je tako

$$\frac{2\pi}{3}\left(b^3 - (b^2 - a^2)^{3/2}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ *na plašču: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Simetrija: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi plašč valja, torej tisti del površine telesa G, ki ne leži na površini krogle.

Rešitev: V tem primeru je $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 0$. *Pretok skozi celotno površino telesa* G *je enak* 0. *Na krogelnih kapicah je normala* $\mathbf{n}$ *kolinearna* (x, y, z), *zato je tam* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$. *Prispevek krogelnih kapic k celotnemu pretoku je enak* 0, *zato je tudi pretok skozi plašč valja enak* 0.

Ocenjevanje:

- $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ *na krogelnih kapicah: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Simetrija: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*