FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

25. januar 2013

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Naj bo za $-\infty < x < \infty$ in $y > 0$

$$F(x,y) = e^{-x}e^{y/2}\left(1 - \Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right)\right) .$$

kjer je $\Phi(u)$ funkcija ene spremenljivke, za katero je

$$\Phi'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2} .$$

a. (10) Izrazite F_{xx} s funkcijo $\Phi(u)$ in njenimi odvodi.

Rešitev: Računamo po pravilih za odvajanje sestavljenih funkcij.

$$F_x = e^{y/2}e^{-x}\left(-1 + \Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right) + \Phi'\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right)\frac{1}{\sqrt{y}}\right) .$$

Odvajamo še enkrat.

$$\begin{aligned} F_{xx} &= e^{y/2}e^{-x}\left(1 - \Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right) - \Phi'\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right)\frac{1}{\sqrt{y}} + \right. \\ &\qquad \left. -\Phi'\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right)\frac{1}{\sqrt{y}} - \Phi''\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right)\frac{1}{y}\right) . \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je

$$\Phi'\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y-x)^2}{2y}}$$

in

$$\Phi''\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{y-x}{\sqrt{y}}\,e^{-\frac{(y-x)^2}{2y}} .$$

Sledi

$$F_{xx} = e^{y/2}e^{-x}\left(1 - \Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{y+x}{y^{3/2}}\,e^{-\frac{(y-x)^2}{2y}}\right) .$$

Ocenjevanje:

- *Pravila za odvajanje sestavljenih funkcij: 2 točki.*
- *F_x: 2 točki.*
- *Pravilo za odvajanje produkta: 2 točki.*
- *F_{xx}: 2 točki.*
- *Preurejanje in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\frac{1}{2}\,F_{xx} - F_y .$$

Rešitev: Manjka nam F_y. Računamo

$$F_y = e^{-x}e^{y/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right) - \Phi'\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{(x+y)}{2y^{3/2}}\right) .$$

Vstavimo $\Phi'(u)$ *in sledi*

$$F_y = \frac{1}{2}e^{-x}e^{y/2}\left(1-\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{y}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2y}}\cdot\frac{(x+y)}{y^{3/2}}\right).$$

Sledi

$$\frac{1}{2}F_{xx}-F_y = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravila za odvajanje sestavljenih funkcij: 2 točki.*
- *Pravilo za odvajanje produkta: 2 točki.*
- F_y*: 2 točki.*
- *Preurejanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $g(x,y)$ je dana s predpisom

$$g(x,y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + y^2)\,.$$

a. (10) Pokažite, da je točka $(-3,0)$ stacionarna točka funkcije $g(x,y)$ in ugotovite ali je lokalni maksimum ali lokalni minimum.

Rešitev: Računamo

$$g_x(x,y) = 2(2x+2)\left(x^2 + 2x + y^2\right) - 8x \quad \textit{in} \quad g_y(x,y) = 4y\left(x^2 + 2x + y^2\right) - 8y\,.$$

Z vstavljanjem ugotovimo, da sta parcialna odvoda v točki $(-3,0)$ *enaka* 0. *Izračunamo še*

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(2x+2)^2 + 4\left(x^2 + 2x + y^2\right) - 8 & 4(2x+2)y \\ 4(2x+2)y & 8y^2 + 4\left(x^2 + 2x + y^2\right) - 8 \end{pmatrix}.$$

Z vstavljanjem dobimo, da je

$$Hf(-3,0) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hessejeva matrika je pozitivno definitna, zato gre za lokalni minimum.

Ocenjevanje:

- *Prvi odvodi: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Drugi odvodi: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da lahko funkcija $f(x,y) = x^2 + y^2$ pri pogoju $g(x,y) = 0$ doseže svojo največjo vrednost v točki $(-4,0)$.

Rešitev: Po Lagrangeu sestavimo funkcijo

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda\left((x^2 + y^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + y^2)\right)\,.$$

Odvajamo parcialno na x *in* y *in odvode izenačimo z* 0. *Dobimo enačbi*

$$\begin{aligned} F_x(x,y) = 2x - \lambda\left(2(x^2 + y^2 + 2x)(2x+2) - 8x\right) &= 0 \\ F_y(x,y) = 2y - \lambda\left(4(x^2 + y^2 + 2x)y - 8y\right) &= 0\,. \end{aligned}$$

Da dana točka ustreza enačbi $g(x,y) = 0$ *preverimo z vstavljanjem. Prav tako z vstavljanjem preverimo, da sta parcialna odvoda funkcije* $F(x,y)$ *enaka* 0.

Ocenjevanje:

- *F: 2 točki.*
- *Parcialna odvoda: 2 točki.*
- *Preverjanje, da je $g(x,y) = 0$.*
- *Preverjanje, da sta parcialna odvoda 0: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

3. (20) Območje G naj bo krog dan s predpisom

$$G = \{(x, y)\colon (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}\,.$$

a. (10) Z uporabo polarnih koordinat izračunajte

$$\int_G x \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Upoštevajte, da je

$$\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)\,.$$

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate. V območje G se preslika območje

$$H = \{(r, \phi)\colon -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2\cos\phi\}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\int_G x \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \int_H r^2 \cos\phi \,\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi \,\mathrm{d}\phi \int_0^{2\cos\phi} r^2 \mathrm{d}r \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\phi \,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{8}{3}\left(\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \pi\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Koti: 2 točki.*
- *$r(\phi)$: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte ploščino preseka območja G z območjem med premicama $y = ax$ in $y = bx$, kjer je $0 < a < b$. Kot znano upoštevajte, da je

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\,.$$

Rešitev: Razmislek je podoben kot v prvi točki, le kota tečeta od $\alpha = \operatorname{arctg} a$ *do* $\beta = \operatorname{arctg} b$*. Računamo*

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\phi \int_0^{2\cos\phi} r\mathrm{d}r &= 2\int_\alpha^\beta \cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi \\
&= \left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right)\Big|_\alpha^\beta \\
&= \beta - \alpha + \frac{b}{1+b^2} - \frac{a}{1+a^2}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Koti: 2 točki.*
- $r(\phi)$*: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana z enačbo

$$\Phi(u,v) = \left(u\sqrt{1-v^2}, uv, \sqrt{1-u^2}\right)$$

za $0 \le u \le 1$ in $0 \le v \le 1$.

a. (10) Izračunajte enotsko normalo na ploskev v točki $T(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = \left(\sqrt{1-v^2}, v, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

in

$$\Phi_v = \left(-\frac{uv}{\sqrt{1-v^2}}, u, 0\right).$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}} \left(u\sqrt{1-v^2}, uv, \sqrt{1-u^2}\right).$$

Iz zadnje komponente razberemo, da je

$$\sqrt{1-u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

torej $u = \sqrt{2/3}$. *Iz tega sledi* $v = 1/\sqrt{2}$. *Vstavimo in dobimo*

$$\mathbf{n} = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right).$$

Ocenjevanje:

- Φ_u: *2 točki.*
- Φ_v: *2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki,*
- *Točka: 2 točki.*
- *Normalni vektor: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (-y, x, z)$. Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi ploskev $\mathcal{S}$.

Rešitev: Računamo

$$\mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) = \frac{u\left(-uv \cdot u\sqrt{1-v^2} + u\sqrt{1-v^2} \cdot uv + \sqrt{1-u^2} \cdot \sqrt{1-u^2}\right)}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}.$$

Poenostavimo in sledi, da je

$$\mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) = \frac{u\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{[0,1]^2} \frac{u\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-v^2}}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\, \mathrm{d}u \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}} \\
&= -\frac{1}{3}(1-u^2)^{3/2}\Big|_0^1 \cdot \arcsin v\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Množenje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bo $\mathbf{F} = (x^3, x^2y, x^2z)$.

a. (10) Izračunajte pretok $\mathbf{F}$ skozi površino valja, danega z $V = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq b\}$. Za normalo izberite vektor, ki "kaže" iz valja.

Rešitev: Najprej izračunamo divergenco vektorskega polja.

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = x^2 \cdot (3+1+1) = 5x^2 \,.$$

Uporabimo Gaussov izrek in v integral uvedemo cilindrične koordinate. Dobimo

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = 5 \int_0^b \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, \mathrm{d}\phi \int_0^a r^3 \mathrm{d}r = \frac{5\pi a^4 b}{4}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še pretok $\mathbf{F}$ skozi zgornjo polovico površine krogle s polmerom R in izhodiščem v središču. Zgornja polovica je tista, za katero je $z \geq 0$.

Rešitev: Možnosti je več. Ena je ta, da opazimo, da je pretok skozi poljuben del ravnine xy enak nič, ker je polje na tej ravnini vzporedno z njo. Pretok skozi zgornji del krogle torej lahko spet izračunamo po Gaussovem izreku, ker je enak integralu divergence po zgornji polovici krogle. Uvedemo še krogelne koordinate in dobimo

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = 5 \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \sin^2\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^R r^4 \mathrm{d}r = \frac{2\pi R^5}{3}\,.$$

Upoštevali smo, da je $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta = \int_0^1 (1-u^2)\, \mathrm{d}u = 2/3$, *kar sledi iz vpeljave nove spremenljivke* $\cos\theta = u$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z Gaussovim izrekom:2 točki.*
- *Opažanje, da je pretpk skozi xy ravnino enak 0:2 točki.*
- *Krogelne koordinate:2 točki.*
- *Fubini:2 točki.*
- *Rezultat:2 točki.*