FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

10. julij, 1997

Ime in priimek: ______________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y) = y(3x^2 - y^2)\,.$$

a. (10) Dokažite, da obstaja na primerni okolici U točke $x = 0$ funkcija $g\colon U \to \mathbb{R}$, taka da je $g(0) = 3$ in $f(x, g(x)) = -27$ za $x \in U$. Izračunajte $g'(0)$.

Rešitev: Po izreku o impličitni funkciji taka funkcija $g(x)$ na neki okolici U točke $x = 0$ obstaja, če je $f(0,3) + 27 = 0$ in $f_y(0,3) \neq 0$. Preverimo

$$f_y(x,y) = 3x^3 - 3y^2 \qquad \text{torej} \qquad f_y(0,3) = -27 \neq 0\,.$$

Odvod implicitne funkcije izračunamo po formuli

$$g'(0) = -\frac{f_x(0,3)}{f_y(0,3)} = 0\,,$$

kjer smo upoštevali, da je $f_x(x,y) = 6xy$.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $f(0,3) + 27 = 0$: 2 točki.*
- *Preverjanje $f_y(0,3) + 27 \neq 0$: 4 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Izračun $g'(0)$: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte $g''(0)$.

Rešitev: Identiteto $f(x, g(x)) + 27 = 0$ odvajamo dvakrat po x. Po prvem odvajanju dobimo

$$f_x + f_y \cdot g' = 0$$

po drugem pa

$$f_{xx} + f_{yx} \cdot g' + (f_{xy} + f_{yy} \cdot g') \cdot g' + f_y \cdot g'' = 0\,.$$

V načelu moramo v vse dvojne parcialne odvode odvode vstaviti točko $(0,3)$ in v odvode g točko $x = 0$. Ker je $g'(0) = 0$ potrebujemo samo

$$f_{xx}(x,y) = 6y \qquad \text{torej} \qquad f_{xx}(0,3) = 18\,.$$

V a. smo izračunali $f_y(0,3) = -27$. Vstavimo vrednosti v zgornjo formulo in dobimo

$$18 - 27 \cdot g''(0) = 0 \qquad \text{ali} \qquad g''(0) = \frac{2}{3}\,.$$

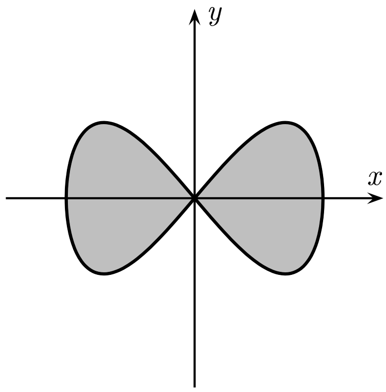
Ocenjevanje:

- *Prvi odvod identitete $f(x, g(x)) + 27 = 0$: 2 točki.*
- *Drugi odvod identitete: 6 točk.*
- *Vstavljanje in rezultat: 2 točki.*

2. (20) Lemniskata je dana z enačbo

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$$

za $a > 0$. Krivulja je na spodnji sliki.



a. (10) Naj bo G osenčeno območje na zgornji sliki. Izračunajte

$$\int_G \sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Namig: Polarne koordinate.

Rešitev: Zaradi simetrije je dovolj izračunati integral po desnem "ušesu" lemniskate. V polarnih koordinatah je področje oblike

$$H = \{(r,\phi)\colon\ -\pi/4 \le \phi \le \pi/4, 0 \le r \le a\sqrt{2\cos 2\phi}\}\,.$$

To dobimo z vstavljanjem $x = r\cos\phi$ in $y = r\sin\phi$ v enačbo za lemniskato.

Dvojni integral preide v

$$
\begin{aligned}
\int_G \sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_H \sqrt{2a^2 - r^2} r \; dr\; \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\phi}} r\sqrt{2a^2 - r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi \frac{\sqrt{2}a^3}{3}(2 - 2(1-\cos 2\phi)^{3/2}) \\
&= \frac{\sqrt{2}a^3}{3}(\pi - 2^{5/2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\sin^3\phi|\,\mathrm{d}\phi) \\
&= \frac{\sqrt{2}a^3}{3}(\pi - 2^{7/2}\int_{\sqrt{2}/2}^{1} (1-u^2)\mathrm{d}u) \\
&= \frac{\sqrt{2}a^3}{3}(\pi - 2^{7/2}(1 - \sqrt{2}/2 - \frac{1}{3} + \sqrt{2}/12))
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 4 točke.*

b. (10) Utemeljite, da obstaja izlimitirani integral

$$
\int_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}}
$$

in ga izračunajte.

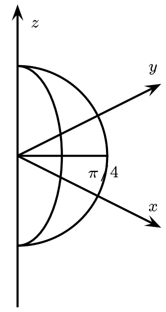
Rešitev: Integriramo nenegativno funkcijo, zato je vseeno, kako napihujemo področja, ki bodo zajela vso desno uho lemniskate. Uvedemo polarne koordinate in *dobimo podobno kot v a.*

$$
\begin{aligned}
\int_G \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{\sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}} &= \int_H \frac{r}{\sqrt{2a^2 - r^2}}\ dr\ \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\phi}} \frac{r}{\sqrt{2a^2 - r^2}}\ \mathrm{d}r \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi \sqrt{2}a(1 - \sqrt{1 - \cos 2\phi}) \\
&= \sqrt{2}a(\pi/2 - 2\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \cos 2\phi}\ \mathrm{d}\phi) \\
&= \sqrt{2}a(\pi/2 - 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sin\phi\ \mathrm{d}\phi) \\
&= \sqrt{2}a(\pi/2 - 2\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}/2))
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev, zakaj izlimitirani integral dobro definiran: 2 točki.*
- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F} = zx\,\mathbf{i} + zy\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, .



a. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi površino "krhlja" krogle s polmerom R med zemljepisnima širinama 0 in $\pi/4$ na zgornji sliki.

Rešitev: Divergenca vektorskega polja $\mathbf{F}$ *je*

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 4z\,.$$

Po Gaussovem izreku je pretok skozi površino krhlja enak integralu divergence po krhlju. Uvedemo krogelne koordinate in dobimo

$$\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\,\phi \int_0^R r^2\,\mathrm{d}\,r \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Uvedba krogelnih koordinat: 2 točki.*
- *Izračun integrala: 4 točke.*

b. (10) Izračunajte še pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi del površine krhlja, ki leži na površini krogle. Za normalo izberite $\mathbf{r}/r$.

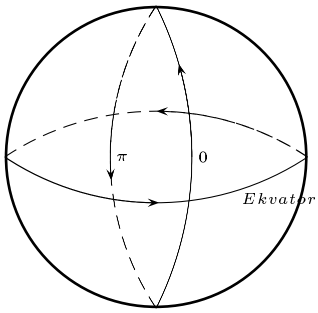
Rešitev: Vektorsko polje $\mathbf{F}$ *je vzporedno z* (x, y, z)*, kar pomeni, da je pretok skozi stranski ploskvi enak 0. Ker je pretok skozi ves krhelj tudi enak 0, je rezultat enak 0.*

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je pretok skozi stranski ploskvi enak 0: 10 točk.*
- *Sicer:*
  - *Parametrizacija ploskve: 4 točke.*
  - *Nastavitev integrala: 4 točke.*
  - *Rezultat: 2 točki*

4. (20) Naj bo dano vektorsko polje $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ na $\mathbb{R}^3$.

a. (10) Z uporabo Stokesovega izreka izračunajte krivuljni integral po robu dela krogle s polmerom R med zemjepisnima dolžinama 0 in π. Orientacija naj bo kot na spodnji sliki.



Rešitev: Izračunamo najprej rotor vektorskega polja $\mathbf{F}$. *Dobimo*

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (0, 2, 1)^T .$$

Namesto, da bi računali pretok rotorja skozi površino polkrogle, si izberimo kar del yz ravnine, napet na krožnico, po kateri računamo krivuljni integral. Po Stokesovem izreku je krivuljni integral enak pretoku rotorja skozi to ploskev. Ker $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ *leži v yz ravnini, je ta pretok enak* 0.

Ocenjevanje:

- *Izračun rotorja: 2 točki.*
- *Opazka, da rotor nima x komponente: 2 točki.*
- *Pravilna uporaba Stokesovega izreka: 2 točki.*
- *Parametrizacija ploskve: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še krivuljni integral $\oint_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$ po ekvatorju s tem, da se gibljete proti "vzhodu", kot na sliki.

Rešitev: Uporabimo Stokesov izrek. Za ploskev izberemo krog s polmerom R v xy ravnini z normalo $\mathbf{n} = (0,0,1)^T$. Po Stokesovem izreku je

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_K \mathbf{rot}(\mathbf{F})\ \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \int_K \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= \pi R^2\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Pravilna uporaba Stokesovega izreka: 2 točki.*
- *Izbira in parametrizacija ploskve: 2 točki.*
- *Izračun krivuljnega integrala: 6 točk.*
- *Opomba: Krivuljne integrale je mogoče računati direktno z parametrizacijo poti. Pravilen račun prinese vse točke.*

5. (20) Dana je funkcija

$$f(x) = \sin(\mu x)\,,$$

kjer je $\mu \in (0,1)$.

a. (10) Dokažite, da je Fourierova vrsta za $f(x)$ enaka

$$\frac{2\sin(\mu\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n\cdot\sin(nx)}{\mu^2-n^2}\,.$$

Utemeljite, zakaj ta Fourierova vrsta konvergira proti $f(x)$ za vsak $x \in (-\pi, \pi)$.

Rešitev: Najprej ugotovimo, da je $f(x)$ liha funkcija, torej je $a_n = 0$ za vse $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\mu x\sin nx\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\cos(\mu-n)x-\cos(\mu+n)x]\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\mu-n)x}{\mu-n}-\frac{\sin(\mu+n)x}{\mu+n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\mu\pi\cdot\cos n\pi}{\mu-n}-\frac{\sin\mu\pi\cdot\cos n\pi}{\mu+n}\right) \\
&= \frac{(-1)^n\sin\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\mu+n}-\frac{1}{\mu-n}\right) \\
&= \frac{2(-1)^n\sin\mu\pi}{\pi}\frac{n}{\mu^2-n^2}\,.
\end{aligned}$$

Funkcija $f(x)$ je odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva. Za $x \in (-\pi,\pi)$ velja $(f(x+)+f(x-))/2 = f(x)$, ker je $f(x)$ na odprtem intervalu zvezna. Fourierova vrsta za te x konvergira.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je funkcija liha: 2 točki.*
- *Predstavitev $\sin\mu x\sin nx$ s kosinusi: 2 točki.*
- *Izračun b_n: 4 točke.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Uporabite zgornjo vrsto za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4(2k-1)}{4(2k-1)^2 - 1}\,.$$

Rešitev: Vstaviti je potrebno $\mu = 1/2$ *in* $x = \pi/4$. *Iz zgornje Fourierove vrste sledi*

$$f(\pi/2) = \sin \mu\pi/2 = \frac{2 \sin \mu\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi/2)}{(1/2)^2 - n^2}\,.$$

V vsoti na desni so od 0 različni samo lihi členi. Seštevamo po $2k-1$ *za* $k = 1, 2, \ldots$ *in upoštevamo, da je* $\sin((2k-1)\pi/2) = (-1)^{k+1}$. *Dobimo*

$$\frac{\pi \sin \mu\pi/2}{2 \sin \mu\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{(1/2)^2 - (2k-1)^2}\,.$$

Množimo še stevec in imenovalec v vsakem členu v neskončni vrsti s 4 *in dobimo iskano vrsto.*

Ocenjevanje:

- $\mu = 1/2$: *2 točki.*
- $x = \pi/2$: *2 točki.*
- *Samo lihi členi so različni od 0: 2 točki.*
- *Vsota neskončne vrste: 4 točke.*

6. (20) Predpostavite, da je zračni upor za padajoče telo sorazmeren kvadratu hitrosti. Če je m masa telesa, za prosti pad velja diferencialna enačba

$$m\dot{v} = mg - \alpha v^2\,,$$

kjer je v hitrost padanja, α pa konstanta.

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Enačbo preuredimo v

$$\frac{\dot{v}}{1-\alpha/gmv^2} = g\,.$$

Označimo $\kappa = \sqrt{\alpha/gm}$. *Integriramo in dobimo*

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}v}{1-\kappa^2v^2} &= \frac{1}{2}\int [\frac{1}{1+\kappa v} + \frac{1}{1-\kappa v}]\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2\kappa}\log(\frac{1+\kappa v}{1-\kappa v}) \\ &= gt + c\,,\end{aligned}$$

kjer je c integracijska konstanta. Iz tega izračunamo v kot

$$v(t) = \frac{1}{\kappa}\frac{Ce^{2gt\kappa}-1}{Ce^{2gt\kappa}+1}\,,$$

kjer je $C = e^{2c\kappa}$.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je enačba tipa $\dot{v} = g(v)$: 2 točki.*
- *Integriranje: 4 točke.*
- *Rešitev: 4 točke.*

b. (10) Predpostavite $v(0) = \sqrt{mg/\alpha}$. Kakšna bo hitrost padanja telesa v času t?

Rešitev: Iz splošne rešitve v a. je razvidno, da bo $1/\kappa$ hitrost telesa, ko se bosta sila težnosti in sila zračnega upora uravnotežili. V tem primeru bo hitrost konstantna in enaka $1/\kappa$. Če nastavimo enačbo za konstanto C ugotovimo, da ni rešitve, razen če interpretiramo $C = \infty$ kot rešitev.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da gre za stacionarno hitrost, ki se ne spreminja: 10 točk.*
- *Sicer:*
  - *Nastavitev enačbe za določitev konstante C: 5 točk.*
  - *Ugotovitev, da takega C ni: 3 točke.*
  - *Sklep, da je morda $C = \infty$ prava rešitev: 2 točki.*

7. (20) Delec se giblje v ravnini xy s hitrostjo $\mathbf{v}$. Označimo z v_1 in v_2 koordinati $\mathbf{v}$ v času t. Gibanje delca opisuje sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -bv_2 \\ \dot{v}_2 &= bv_1 . \end{aligned}$$

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko rešitev zgornjega sistema.

Rešitev: Matrika za ta sistem diferencialnih enačb je

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} .$$

Karakteristični polinom te matrike je $P(\lambda) = \lambda^2 + b^2$ z lastnima vrednostima bi in $-bi$. Pripadajoča lastna vektorja sta

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dve linearno neodvisni rešitvi dobimo tako, da vzamemo realni in imaginarni del $e^{ibt}\mathbf{x}_1$. Dobimo

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} \sin bt \\ \cos bt \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} -\cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} .$$

Stolpca fundamentalne matrike bosta linearni kombinaciji $\mathbf{y}_1$ in $\mathbf{y}_2$, ki bosta ustrezali začetnemima pogojema $\mathbf{e}_1$ ali $\mathbf{e}_2$. Konstante zlahka poiščemo in dobimo fundamentalno matriko kot

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} .$$

Ocenjevanje:

- *Lastne vrednosti: 2 točki.*
- *Lastna vektorja: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Nastavek za iskanje stolpcev fundamentalne matrike: 2 točki.*
- *Fundamentalna matrika: 2 točki.*

b. (10) Določite položaj delca v času t, če je delec v času $t = 0$ v izhodišču in je $v_1(0) = 1$ ter $v_2(0) = 1$.

Rešitev: Rešitev pri danih začetnih pogojih dobimo kot

$$v(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos bt + \sin bt \\ \cos bt - \sin bt \end{pmatrix}.$$

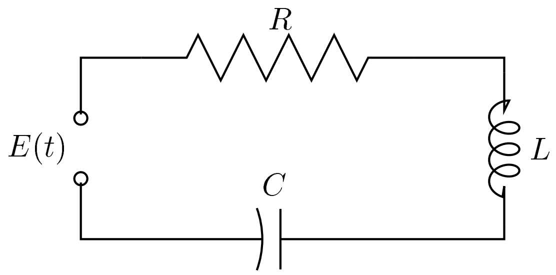
Položaj delca v času t dobimo z integracijo hitrosti.

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{v}(s)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} \sin bt + \cos bt - 1 \\ \sin bt - \cos bt + 1 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Rešitev pri danih začetnih pogojih: 4 točke.*
- *Ugotovitev, da je potrebno integrirati: 2 točki.*
- *Rezultat: 4 točke.*

8. (20) V električni tokokrog na spodnji sliki so vključeni upor z uporom R, kondenzator s kapaciteto C in tuljava z induktivnostjo L.



Označimo tok v tokokrogu z $I(t)$. Zanj velja diferencialna enačba

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + CI = E(t)\,.$$

Predpostavljali bomo, da je $R^2 - 4LC < 0$ in $R > 0$.

a. (10) Naj bo $E(t) = 0$. Najdite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Rešujemo homogeno linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti. Označimo $\omega_0 = \sqrt{4LC - R^2}$. *Karakteristični polinom je* $P(\lambda) = L\lambda^2 + R\lambda + C$ *z ničlama* $(-R + i\omega_0)/2L$ *in* $(-R - i\omega_0)/2L$. *Linearno neodvisni rešitvi sta*

$$I_1(t) = e^{-Rt/2L}\cos(\omega_0 t/2L) \qquad \text{in} \qquad I_2(t) = e^{-Rt/2L}\sin(\omega_0 t/2L)\,.$$

Splošna rešitev je oblike $c_1 I_1 + c_2 I_2$ *za poljubni konstanti* c_1 *in* c_2.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da gre za linerno diferencialno enačbo durgega reda: 2 točki.*
- *Karakteristični polinom in lastni vrednosti: 2 točki.*
- *Pripadajoči linearno neodvisni rešitvi: 4 točke.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Predpostavljajte, da je tokokrog priključen na izmenični tok oblike $E(t) = E_0\sin(\omega t)$. Izračunajte tok v odvisnosti od časa, pri pogoju $I(0) = \dot{I}(0) = 0$.

Rešitev: Enačbo prepišemo v kompleksno obliko

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + CI = E_0 e^{it\omega}\,.$$

Ker predpostavljamo $R > 0$, kompleksno število $i\omega$ ni ničla karakterističnega polinoma in rešitev lahko iščemo z nastavkom $Ae^{it\omega}$. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$A(-L\omega^2 + Ri\omega + C)e^{it\omega} = E_0 e^{it\omega}\,.$$

Sledi

$$A = \frac{E_0}{-L\omega^2 + Ri\omega + C} = \frac{E_0(-L\omega^2 - Ri\omega + C)}{R^2\omega^2 + (C - L\omega^2)^2}\,.$$

Rešitev nehomogene enačbe bo imaginarni del $Ae^{it\omega}$, torej

$$I_0(t) = \frac{E_0((C - L\omega^2)\sin\omega t - R\omega\cos\omega t)}{R^2\omega^2 + (C - L\omega^2)^2}\,.$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe je $I(t) = I_0(t) + c_1 I_1(t) + c_2 I_2(t)$. Iz začetnih pogojev dobimo

$$\begin{aligned}
I(0) &= \frac{E_0 R\omega}{R^2\omega^2 + (C - L\omega^2)^2} + c_1 = 0 \\
\dot{I}(0) &= \frac{E_0(C - L\omega^2)\omega}{R^2\omega^2 + (C - L\omega^2)^2} - Rc_1/2L + \omega_0 c_2/2L = 0\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{E_0 R\omega}{R^2\omega^2 + (C - L\omega^2)^2} \\
c_2 &= -\frac{2E_0 L(C - L\omega^2)\omega}{(R^2\omega^2 + (C - L\omega^2)^2)\omega_0} + \frac{E_0 R^2\omega}{(R^2\omega^2 + (C - L\omega^2)^2)\omega_0}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prepis v kompleksno obliko: 2 točki.*
- *Nastavek za rešitev: 2 točki.*
- *Izračun A: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Rešitev, ki ustreza začetnim pogojem: 2 točki.*