FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

11. julij 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Naj bo $f(u,v)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija za $x^2+y^2<1$. Definirajte sestavljeno funkcijo

$$F(x,y) = f\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right).$$

a. (10) Izrazite F_{xx} in F_{yy} s parcialnimi odvodi funkcije $f(u,v)$.

Rešitev: Računamo po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij.

$$F_x = f_u \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + f_v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \textit{in} \qquad F_y = -f_u \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + f_v \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sledi

$$F_{xx} = \frac{1}{2} f_{uu} + f_{uv} + \frac{1}{2} f_{vv}$$

in

$$F_{yy} = \frac{1}{2} f_{uu} - f_{uv} + \frac{1}{2} f_{vv}.$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo: 2 točki.*
- *F_x: 2 točki.*
- *F_{xx}: 2 točki.*
- *F_y: 2 točki.*
- *F_{yy}: 2 točki.*

b. (10) Izrazite

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_x}{\sqrt{1+F_x^2+F_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_y}{\sqrt{1+F_x^2+F_y^2}}\right).$$

s parcialnimi odvodi funkcije $f(u,v)$.

Rešitev: Ugotovimo, da je

$$F_{xy} = -\frac{1}{2} f_{uu} + \frac{1}{2} f_{vv}.$$

Opazimo, da je

$$1 + f_u^2 + f_v^2 = 1 + F_x^2 + F_y^2.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_x}{\sqrt{1+F_x^2+F_y^2}}\right) = \\
&= \frac{F_{xx}\sqrt{1+F_x^2+F_x^2} - \frac{F_x(F_xF_{xx}+F_yF_{xy})}{\sqrt{1+F_x^2+F_y^2}}}{1+F_x^2+F_y^2} \\
&= \frac{F_{xx}(1+F_x^2+F_y^2) - F_x^2F_{xx} - F_xF_yF_{xy}}{\left(1+F_x^2+F_y^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{F_{xx}(1+F_y^2) - F_xF_yF_{xy}}{\left(1+F_x^2+F_y^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Podobno dobimo

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_y}{\sqrt{1+F_x^2+F_y^2}}\right) = \frac{F_{yy}(1+F_x^2) - F_xF_yF_{xy}}{\left(1+F_x^2+F_y^2\right)^{3/2}}\,.$$

Opazimo

$$F_xF_y = \frac{1}{2}(-f_u^2+f_v^2)$$

in

$$F_{xx}+F_{yy} = f_{uu}+f_{vv}\,.$$

Vstavimo in sledi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_x}{\sqrt{1+F_x^2+F_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_y}{\sqrt{1+F_x^2+F_y^2}}\right) &= \\ &= \frac{f_{uu}(1+f_v^2)+f_{vv}(1+f_u^2)-2f_uf_vf_{uv}}{(1+f_u^2+f_v^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f_u}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f_v}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\right)\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Parcialno odvajanje prvega izraza: 2 točki.*
- *Parcialno odvajanje drugega izraza: 2 točki.*
- F_{xy}*: 2 točki.*
- *Vstavljanje in poenostavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y) = y^2 - x^2y - xy\,.$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije $f(x,y)$ in jih klasificirajte.

Rešitve: Najprej izenačimo parcialna odvoda z 0.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2xy - y = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y - x^2 - x = 0 \end{aligned}$$

Izrazimo y *iz druge enačbe in vstavimo v prvo. Dobimo*

$$-x(x^2+x) - (x^2+x)/2 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 0\,.$$

Ena rešitev je očitno $x = 0$ *in s tem* $y = 0$. *Če ke* $x \neq 0$, *lahko okrajšamo z* $-x$ *in množimo z* 2 *in dobimo enačbo*

$$2x^2 + 3x + 1 = 0\,.$$

iz tega dobimo še rešitvi $x = -1, y = 0$ *in* $x = -1/2, y = -1/8$. *Izračunamo še Hessejevo matriko*

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x-1 \\ -2x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vstavljanje točk $T_1(0,0)$, $T_2(-1,0)$ *in* $T_3(-1/2,-1/8)$ *da matrike*

$$\begin{aligned} H_f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ H_f(-1,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{in} \\ H_f(-1/2,-1/8) &= \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sklepamo, da je T_3 *lokalni minimum, ostali dve točki sta sedli.*

Ocenjevanje:

- *Parcialna odvoda: 2 točki.*
- *Stacionarne točke: 1+1+1 točka.*
- $H_f(x,y)$*: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Sklepi: 1 točka.*

b. (10) Poiščite možne ekstreme pri dodatnem pogoju

$$g(x,y) = -\frac{1-x^2}{2} - y = 0\,.$$

Rešitev: Po Lagrangeovi metodi definiramo $F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ *in parcialna odvoda funkcije* F *izenačimo z* 0.

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= -2xy - y - \lambda x = 0 \\ F_y(x,y) &= 2y - x^2 - x + \lambda = 0 \end{aligned}$$

V drugo enačbo vstavimo $y = -(1-x^2)/2$ *in dobimo*

$$x^2 - 1 - x^2 - x = -\lambda$$

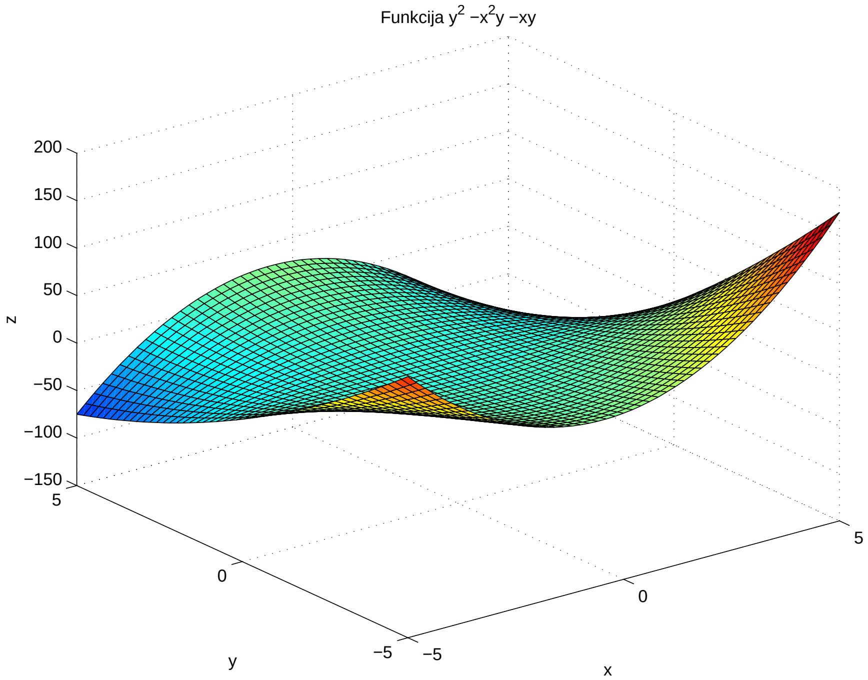
ali

$$x + 1 = \lambda\,.$$

Vstavimo še v prvo enačbo in dobimo

$$-2x(-(1-x^2)/2) + (1-x^2)/2 - (x+1)x = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 0\,.$$

Pomnožimo z -2 *in dobimo* $2x^3+3x^2-1=0$. *Rešitve najprej iščemo med delitelji konstanega člena in dobimo* $x=-1$. *Razstavimo polinom na* $(x+1)(x^2+x/2-1/2)$, *kar nam da še rešitvi* $x = 1/2$ *in še enkrat* $x=-1$. *Možni točki za vezani ekstrem sta* $T_1(-1,0)$ *in* $T_2(1/2,-3/8)$.



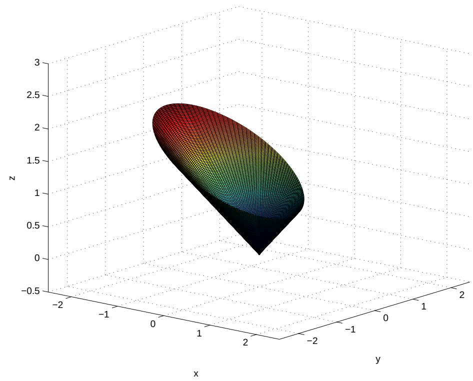
Sl. 1 Graf funkcije $f(x,y) = y^2 - x^2y - xy$.

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Parcialna odvoda: 2 točki.*
- *Upo"stevanje vezi: 2 točki.*
- *Enačba za x: 2 točki.*
- *To"cke: 2 točki.*

3. (20) Na glavo obrnjen stožec z vrhom v izhodišču in osjo, ki sovpada z osjo z, "odsekamo" z ravnino $z = 1 - x/2$. Dobljeno telo označimo z G. V bolj matematičnih oznakah je

$$G = \left\{(x, y, z) \colon \sqrt{x^2 + y^2} \le z, 0 \le z \le 1 - \frac{x}{2}\right\} .$$



Sl. 1 Telo G.

a. (10) S pomočjo krogelnih koordinat izračunajte prostornino telesa G. Kot znano upoštevajte, da je

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi\right)^3} = \frac{2}{(2 + \cos\phi)^2}$$

in

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 \, \mathrm{d}\phi}{(2 + \cos\phi)^2} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} .$$

Rešitev: V krogelnih koordinatah je

$$G = \left\{(r, \phi, \theta) \colon 0 \le \phi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi}\right\} .$$

Računamo

$$\begin{aligned} V &= \int_G \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi}} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi\right)^3} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{2 \, \mathrm{d}\phi}{(2 + \cos\phi)^2} \\ &= \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte masni vztrajnostni moment telesa G okrog osi z, če je masna gostota konstantno ρ. Računamo integral

$$\int_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Kot znano upoštevajte, da je

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi\right)^5} = \frac{4}{(2+\cos\phi)^4}$$

in

$$\int_0^{2\pi} \frac{4\,\mathrm{d}\phi}{(2+\cos\phi)^4} = \frac{88\pi}{27\sqrt{3}}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \rho\int_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi}} r^4\sin^3\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\rho}{5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi\right)^5} \\
&= \frac{\rho}{5}\int_0^{2\pi}\frac{4\,\mathrm{d}\phi}{(2+\cos\phi)^4} \\
&= \frac{8\pi\rho}{135\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično z

$$\Phi(u,v) = (v(\cos u \cos v - \sin u \sin v), v(\sin u \cos v + \cos u \sin v), v)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $0 \leq v \leq \pi$.

a. (10) Poiščite normalo na ploskev v točki $T(\pi/2, 0, \pi/2)$.

Rešitev: Računanje si poenostavimo, če opazimo

$$\Phi(u,v) = (v\cos(u+v), v\sin(u+v), v) \ .$$

Računamo

$$\Phi_u = (-v\sin(u+v), v\cos(u+v), 0)$$

in

$$\Phi_v = (\cos(u+v) - v\sin(u+v), \sin(u+v) + v\cos(u+v), 1) \ .$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = (v\cos(u+v), v\sin(u+v), -v) \ .$$

Razberemo, da je

$$\Phi\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right) \ .$$

Sledi

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}\right) \ .$$

Ocenjevanje:

- *Φ_u: 2 točki.*
- *Φ_v: 2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki,*
- *Argumenta: 2 točki.*
- *Normalni vektor: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (-y, x, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v &= \\ &= -\int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} v^2\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\ &= -2\pi \int_0^\pi v^2\, \mathrm{d}v \\ &= -\frac{2\pi^4}{3} \,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Na glavo obrnjen stožec z vrhom v izhodišču in osjo, ki sovpada z osjo z, "odsekamo" z ravnino $z = 1 - x/2$. Dobljeno telo označimo z G. V bolj matematičnih oznakah je

$$G = \left\{(x, y, z) \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, 0 \leq z \leq 1 - \frac{x}{2}\right\} .$$

a. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok $\mathbf{F}$ skozi tisti del površine telesa G, ki sovpada z ravnino $z = 1 - \frac{x}{2}$. Za normalo izberite vektor, ki kaže iz telesa.

Rešitev: Ugotovimo, da je $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3$*, torej je pretok skozi celotno površino* G *enak* $3V$*, kjer je* V *prostornina telesa* G*. Na delu površine* G*, ki sovpada s plaščem stožca, je vektorsko polje vzporedno s površino in je tako prispevek v pretoku enak* 0*. Iskani pretoke je tako* $3V$*.*

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Vzporednost: 2 točki.*
- *Prostornina: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (2y, -2x + z, -y)$. Poiščite pretok $\mathbf{F}$ skozi tisti del površine G, ki sovpada s plaščem stožca. Za normalo izberite vektor, ki kaže iz telesa G.

Rešitev: Normala na ravnino, s katero "odsekamo" stožec, je $\mathbf{n} = (\frac{1}{2}, 0, 1)$*. Opazimo, da je* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$*. Prispevek dela površine, ki sovpada z ravnino, je enak* 0*. Ker je* $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$*, je po Gaussovem izreku tudi celoten pretok enak* 0*. Iskani pretok je zato enak* 0*.*

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Normala: 2 točki.*
- *Pretok skozi ravnino: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*