FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

16. junij, 1997

Ime in priimek: ______________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo dana funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x,y) = e^{xy} + x^2 + 2y^2 - 2\,.$$

a. (10) Dokažite, da na primerni okolici U točke $x=0$ obstaja funkcija $g\colon U \to \mathbb{R}$, za katero velja $g(0) = \sqrt{2}/2$ in $f(x, g(x)) = 0$. Dokažite, da v primeru, ko $f_y(x, g(x)) \neq 0$ na U, velja

$$g'(x) = -\frac{g(x)e^{xg(x)} + 2x}{xe^{xg(x)} + 4g(x)}\,.$$

Rešitev: Po izreku o implicitni funkciji ostaja okolica U in funkcija $g(x)$, če je $f_y(0, \sqrt{2}/2) \neq 0$. Izračunamo

$$f_y(x,y) = xe^{xy} + 4y\,.$$

Vstavimo točko $(0, \sqrt{2}/2)$ in dobimo $2\sqrt{2}$. Če na U velja $f_y(x, g(x)) \neq 0$, mora po izreku o implicitni funkciji veljati

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}\,.$$

Izračunamo še $f_x(x,y) = ye^{xy} + 2x$. Vstavimo v zgornji izraz za $g'(x)$ in dobimo točne zvezo v nalogi.

b. (10) Enačba $f(x,y) = 0$ določa zaključeno krivuljo v ravnini. Napišite enačbo tangente na to krivuljo v točki $(0, -\sqrt{2}/2)$.

Rešitev: Podobno kot v prvem delu naloge se prepričamo, da na neki okolici U točke $x = 0$ dana krivulja sovpada z grafom funkcije $g(x)$, za katero je $g(0) = -\sqrt{2}/2$. Izračunati moramo $f_y(0, -\sqrt{2}/2) = -2\sqrt{2} \neq 0$. Naklon tangente bo enak odvodu funkcije $g(x)$ v točki $x = 0$. Odvod dobimo po formuli

$$g'(0) = -\frac{f_x(0, -\sqrt{2}/2)}{f_y(0, -\sqrt{2}/2)} = -\frac{1}{4}\,.$$

Enačba tangente je

$$y + \sqrt{2}/2 = -\frac{1}{4}x\,.$$

2. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ naj bo definirana kot

$$f(x,y,z) = \frac{\exp(-2x^2-2y^2-2z^2-2xy-2xz-2yz)}{\sqrt{2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz}}$$

a. (10) Izračunajte $\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ po območju $G = \{(x,y,z)\colon R_1 \le 2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz \le R_2\}$ za $R_2 > R_1 > 0$.

Namig: $u = (-x-y+2z)/\sqrt{6}, v = (-x+y)/\sqrt{2}, w = 2(x+y+z)/\sqrt{3}$ *in* $2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz = u^2+v^2+w^2$.

Rešitev: Vpeljava nove spremenljivke je oblike

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ta linearna preslikava področje G *preslika na* $H = \{(u,v,z)\colon R_1^2 \le u^2+v^2+w^2 \le R_2^2\}$, *Jacobijeva determinanta pa je enaka inverzni absolutni vrednosti determinante zgornje matrike. Determinanta je enaka* -2. *Integral preide v*

$$\frac{1}{2}\int_H \frac{\exp(-u^2-v^2-w^2)}{\sqrt{u^2+v^2+z^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,.$$

Uvedemo krogelne koordinate in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\exp(-r^2)}{r} r^2\,\mathrm{d}r &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot 2 \cdot [-e^{-r^2}/2]_{R_1}^{R_2} \\ &= \pi(e^{-R_1} - e^{-R_2})\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte še izlimitirani integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

in utemeljite, da je ta izlimitirani integral dobro definiran.

Rešitev: Integriramo nenegativno funkcijo, zato ni pomembno, kako "napihujemo" področja, po katerih integriramo. Dovolj je, da gre $R_1 \to 0$ *in* $R_2 \to \infty$. *Iz rezultata v a. potem sledi, da je*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pi\,.$$

3. (20) Naj bo $\mathbf{F} = e^{x+y+z}\mathbf{i} + e^{x+y+z}\mathbf{j} + e^{x+y+z}\mathbf{k}$.

a. (10) Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi površino piramide, dane z $\Delta = \{(x,y,z)\colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

Rešitev: Divergenca danega vektorskega polja je

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3e^{x+y+z}\,.$$

Po Gaussovem izreku je pretok skozi površino piramide enak integralu divergence po piramidi. Po Fubinijevem izreku je

$$\begin{aligned}
3\int_\Delta e^{x+y+z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= 3\int_0^1 e^x\mathrm{d}x \int_0^{1-x} e^y\mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} e^z\mathrm{d}z \\
&= 3\int_0^1 e^x\mathrm{d}x \int_0^{1-x} e^y(e^{1-x-y}-1)\mathrm{d}y \\
&= 3\int_0^1 e^x\mathrm{d}x \int_0^{1-x} (e^{1-x}-e^y)\mathrm{d}y \\
&= 3\int_0^1 e^x(e^{1-x}(1-x)+1-e^{1-x})\,\mathrm{d}x \\
&= 3\int_0^1 (-ex)+e^x)\,\mathrm{d}x \\
&= 3(e/2+e-1) \\
&= 3e/2-3\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte še pretok $\mathbf{F}$ skozi ploskev, ki je graf funkcije $f(x,y) = (x+y)/2$ na območju $G = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1\}$.

Rešitev: Vektorsko polje $\mathbf{F}$ *je na dani ploskvi, ki je del ravnine, vedno vzporedno s to ravnino. Pretok je zato enak 0.*

4. (20) Vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$ naj bo dano z $\mathbf{F} = zx\,\mathbf{i} + zy\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$.

a. (10) Krivulja $\mathcal{C}$ naj bo presečišče pokončnega valja z osjo enako z-osi in polmerom a in ravnine $z = x + y$. Krivuljo orientiramo tako, da je projekcija orientacije na xy-ravnino nasprotna urinemu kazalcu. Izračunajte krivuljni integral $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r}$.

Rešitev: Rotor danega vektorskega polja je

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (-y, x, 0)^T\,.$$

Krivulja $\mathcal{C}$ *je rob ploskve* $\mathcal{S}$*, ki je graf funkcije* $f(x,y) = x + y$ *na območju* $K = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq a^2\}$*. Uporabimo formulo za izračun ploskovnega integrala*

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \int_K (y - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r^2(\sin\phi - \cos\phi)\,\mathrm{d}r = 0\,. \end{aligned}$$

b. (10) Dokažite, da je

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{F}))\,\mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

za vsako zaključeno krivuljo $\mathcal{C}$ v prostoru.

Rešitev: Izračunamo najprej

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{F})) = (0, 0, 2)^T\,.$$

Dokazujemo, da je krivuljni integral po zaključeni poti tega vektorskega polja enak 0. Polje je gradient funkcije $f(x,y,z) = 2z$ *in trditev sledi iz tega.*

5. (20) Naj bo $f(x) = x\sin x$ na intervalu $-\pi \le x \le \pi$.

a. (10) Pokažite, da za vse $x \in [-\pi, \pi]$ velja

$$f(x) = 1 - \frac{\cos x}{2} - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1}\,.$$

Rešitev: Funkcija $f(x)$ je soda, zato $b_n = 0$ za vse n.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}([-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\ \mathrm{d}x) \\ &= \frac{2\pi}{\pi} = 2\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos x\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}([-x\cos 2x/2]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\ \mathrm{d}x) \\ &= \frac{1}{\pi}(-\pi/2) = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Za $n > 1$ dobimo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos nx\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}([-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{x\cos(n-1)x}{n-1}]_0^\pi - \int_0^\pi(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1})\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\pi\cos(n-1)\pi}{n-1}) \\ &= (-1)^{n+1}(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}) \\ &= 2(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2-1}\,. \end{aligned}$$

Vrsta konvergira za vsak $x \in [-\pi, \pi]$, *ker je funkcija zvezna in zvezno odvedljiva in je* $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$ *in* $f(\pi) = f(-\pi)$.

b. (10) Izračunajte vsoto neskončne vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \cdots .$$

Rešitev: V vrsto v a. vstavimo $x = \pi$ *in upoštevamo, da je* $\cos n\pi = (-1)^n$. *Dobimo enakost*

$$0 = 1 + \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} .$$

Sledi, da je vsota neskončne vrste enaka $3/4$.

6. (20) Dana naj bo diferencialna enačba

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}\,.$$

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y}{x}^2}\,.$$

Gre za homogeno enačbo, ki jo rešujemo z nastavkom $u = y/x$. Funkcija u ustreza enačbi

$$u' = \frac{\sqrt{1-u^2}}{x}\,,$$

kar je enačba z ločljivima spremenljivkama in splošno rešitvijo

$$\arcsin(u) = \log x - \log c$$

za neko konstanto c. Splošna rešitev za u je

$$u(x) = \sin(\log(x/c))$$

in za y

$$y(x) = xu(x) = x\sin(\log(x/c))\,.$$

b. (10) Poiščite rešitev na intervalu $[1, \infty)$, ki ustreza začetnemu pogoju $y(1) = 0$.

Rešitev: Zahtevi $y(1) = 0$ bo zadoščeno, če bo

$$y(1) = \sin(\log(1/c)) = 0$$

torej $\log(1/c) = 0$ ali $c = 1$.

7. (20) Sistem diferencialnih enačb je dan z

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x - y\,. \end{aligned}$$

a. (10) Poiščite rešitev sistema, ki ustreza začetnim pogojem $x(0) = y(0) = 1$.

Rešitev: Najprej poiščemo lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom je $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$. *Lastni vrednosti sta* $\lambda_1 = -1 + i$ *in* $\lambda_2 = -1 - i$. *Pripadajoča lastna vektorja sta*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Linearno neodvisni rešitvi dobimo, če vzamemo realni in imaginarni del prve rešitve. Dobimo

$$\mathbf{y}_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{y}_2 = e^{-t}\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Želena rešitev bo linearna kombinacija $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$. *Za konstanti* c_1 *in* c_2 *mora veljati* $-c_2 = 1$ *in* $c_1 = 1$. *Iskana rešitev je*

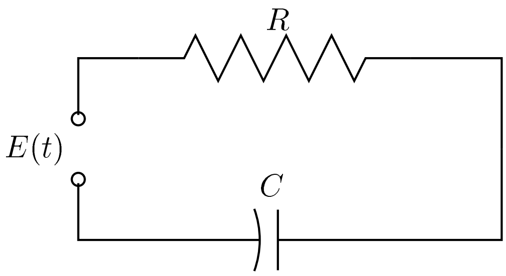
$$e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

b. (10) Napišite fundamentalno matriko rešitev sistema diferencialnih enačb.

Rešitev: Linearno neodvisni rešitvi smo našli v a. Določiti je potrebno le še konstanti c_1 *in* c_2, *tako da bo linearna kombinacija enkrat enaka* $\mathbf{e}_1$ *in drugič* $\mathbf{e}_2$. *V prvem primeru je* $c_2 = -1$ *in* $c_1 = 0$, *v drugem pa* $c_1 = 1$ *in* $c_2 = 0$. *Fundamentalna matrika je*

$$\mathbf{Y}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

8. (20) Kirchoffov zakon pravi, da je vsota padcev napetosti v vsakem zaključenem krogu enaka 0. Naj $I(t)$ označuje tok v tokokrogu na sliki. Padec napetosti na uporu je RI, kjer je R upor, kondensator s kapaciteto C pa izvaja napetost sorazmerno z nabojem.



Iz Kirchhoffovega zakona lahko izpeljemo, da je

$$RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t)\,.$$

a. (10) Predpostavljajte, da je napetost $E(t) = E_0e^{-\alpha t}$. Poiščite funkcijo $I(t)$ pri pogoju, da je $I(0) = 0$.

Rešitev: V tem primeru iščemo rešitev nehomogene enačbe

$$I' + \frac{1}{CR}I = -\frac{E_0\alpha e^{-\alpha t}}{R}\,.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $Ae^{-\alpha t}$. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$A(-\alpha + \frac{1}{CR}) = -\frac{E_0\alpha}{R}\,.$$

in dobimo $A = CE_0\alpha/(R\alpha C - 1)$. Splošna rešitev je

$$y(t) = Ae^{-\alpha t} + ce^{-t/CR}\,.$$

Konstanto c določimo iz pogoja

$$I(0) = A + c = 0\,.$$

Torej je $c = -A$.

b. (10) Predpostavljajte, da je tokokrog priključen na izmenični tok oblike $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$. Izračunajte tok v odvisnosti od časa, pri pogoju $I(0) = 0$.

Rešitve: V tem primeru rešujemo nehomogeno enačbo

$$I' + \frac{1}{CR} I = \frac{E_0 \omega}{R} \cos(\omega t) .$$

Enačbo prepišemo v kompleksno obliko. Dobimo

$$I' + \frac{1}{CR} I = \frac{E_0 \omega}{R} e^{it\omega} .$$

Iskana rešitev bo realni del rešitve zgornje enačbe. Vemo, da bo rešitev nehomogene enačbe oblike $Ae^{i\omega t}$*. Vstavimo v enačbo in dobimo*

$$A(i\omega + \frac{1}{CR}) e^{i\omega t} = \frac{E_0 \omega}{R} e^{it\omega} .$$

Sledi

$$A = \frac{CE_0\omega}{iRC\omega + 1} = \frac{CE_0\omega(-iRC\omega + 1)}{R^2C^2\omega^2 + 1} .$$

Splošno rešitev dobimo, če vzamemo realni del zgornje rešitve nehomogene enačbe in prištejemo $ce^{-t/CR}$*. Rešitev nehomogene enačbe prepišemo v*

$$\frac{CE_0\omega(-iRC\omega + 1)}{R^2C^2\omega^2 + 1} e^{i\omega t} = CE_0\omega \frac{RC\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t) + i(-RC\cos(\omega t) + \sin(\omega t))}{R^2C^2\omega^2 + 1} .$$

Splošna rešitev je torej

$$\frac{CE_0\omega(RC\omega \sin \omega t + \cos \omega t)}{R^2C^2\omega^2 + 1} + ce^{-t/CR} .$$

Konstanto c določimo iz začetnega pogoja

$$0 = I(0) = \frac{CE_0\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1} + c$$

ali $c = -CE_0\omega/(R^2C^2\omega^2 + 1)$.