FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

18. junij 1999

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št.:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo $g(u, v)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija definirana na odprti množici $V \subset \mathbb{R}^2$, za katero na V velja

$$g_{uu} + g_{vv} = 0\,.$$

Naj bosta $u(x, y)$ in $v(x, y)$ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji, definirani na odprti množici U, za kateri velja $(u, v) \in V$ in

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

a. (10) Pokažite, da velja

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{in} \qquad u_x v_x + u_y v_y = 0\,.$$

Rešitev: Iz enačb, ki povezujejo parcialne odvode funkcij u in v lahko izračunamo

$$u_{xx} = v_{xy} \qquad \textit{in} \qquad u_{yy} = -v_{xy}\,,$$

od koder takoj sledi želena enakost. Podobno računamo za v. Zadnja enačba je tudi jasna iz enakosti, ki jima zadoščata funkciji u in v.

Ocenjevanje:

- *Ideja: 2 točki.*
- *Opazka, da je vrstni red odvajanj nepomemben: 2 točki.*
- *Ideja s seštevanjem: 2 točki.*
- *Sklep, da sta u in v harmonični: 2 točki.*
- *Zadnja enakost: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da za funkcijo $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$ velja

$$f_{xx} + f_{yy} = 0\,.$$

Rešitev: Odvajamo po pravilih za odvajanje sestavljenih funkcij. Najprej dobimo

$$f_x = g_u u_x + g_v v_x\,.$$

Odvajamo še enkrat in dobimo

$$f_{xx} = g_{uu} u_x^2 + g_{uv} u_x v_x + g_u u_{xx} + g_{uv} u_x v_x + g_{vv} v_x^2 + g_v v_{xx}\,.$$

Podobno dobimo

$$f_{yy} = g_{uu} u_y^2 + g_{uv} u_y v_y + g_u u_{yy} + g_{uv} u_y v_y + g_{vv} v_y^2 + g_v v_{yy}\,.$$

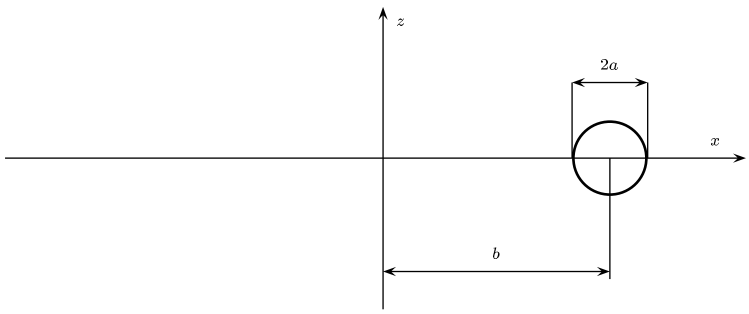
Zberemo vse člene in napišemo

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} &= g_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + g_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \\ &\quad 2g_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + g_u(u_{xx} + u_{yy}) + g_v(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= (g_{uu} + g_{vv})(u_x^2 + u_y^2) + 2g_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \\ &\quad g_u(u_{xx} + u_{yy}) + g_v(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prvo odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje: 2 točki.*
- *Zbiranje členov: 2 točki.*
- $u_x v_x + u_y v_y = 0$*: 2 točki.*
- $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2$*: 2 točki.*

2 (20) Naj bo K krogla s polmerom a s središčem v točki $(b, 0, 0)$. Privzemite, da je $a < b$ kot je prikazano na Sliki 1.



Sl. 1 Položaj krogle v koordinatnem sistemu.

a. (10) Izračunajte masni vztrajnostni moment krogle K okrog osi z. Privzemite, da je gostota $\rho = 1$ in je $a < b$.

Namig: Kam bi postavili primeren koordinatni sistem?

Rešitev: Predstavljajte si, da ima nov koordinatni sistem izhodišče v središču krogle, osi pa vzporedne originalnim osem. Uvedemo krogelne koordinate v novem koordinatnem sistemu in računamo

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_K (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_Q [(r\sin\theta\cos\phi + b)^2 + (r\sin\theta\sin\phi)^2]\, r^2\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^a r^2\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} (r^2\sin^2\theta + 2rb\sin\theta\cos\phi + b^2)\,\mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi \int_0^a r^2\mathrm{d}r \int_0^\pi (r^2\sin^3\theta + b^2\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^a (\frac{4r^4}{3} + 2b^2r^2)\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi(\frac{4a^5}{15} + \frac{2a^3b^2}{3})
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z novim koordinarnim sistemom: 2 točki.*
- *Krogelne koordinate: 2 točki.*
- *Pretvorba integrala in meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še

$$\int_K xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Enako kot prej postavimo nov koordinatni sistem z izhodiščem v središču krogle in osmi vzporednimi originalnim osem. V novem koordinatnem sistemu vpeljemo krogelne koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
\int_K xyz^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_Q (b + r\sin\theta\cos\phi) r \sin\theta \sin\phi \, r^2 \cos^2\theta \, r^2 \mathrm{d}r \ \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_Q \sin\phi\cos^2\theta\sin^2\theta \left(br^5 \sin\phi + r^6 \sin\theta\cos\phi \right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin\phi\cdot\ldots + \sin\phi\cos\phi\cdot\ldots)\,\mathrm{d}\phi \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z novim koordinarnim sistemom: 2 točki.*
- *Krogelne koordinate: 2 točki.*
- *Pretvorba integrala in meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*
- *Opomba: Če opazite simetrijo in sklepate, da je integral enak 0: 10 točk.*

3. (20) Naj bosta f in g dvakrat zvezno odvedljivi funkciji $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Definirajte vektorski polji $\mathbf{F} = f \cdot \nabla g$ in $\mathbf{G} = g \cdot \nabla f$.

a. (10) Dokažite, da je

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \nabla f \times \nabla g \qquad \text{in} \qquad \mathbf{rot}(\mathbf{G}) = \nabla g \times \nabla f\,.$$

Rešitev: Po komponentah je $\mathbf{F} = (fg_x, fg_y, fg_z)$. *Računamo*

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} f_y g_z + f g_{yz} - f_z g_y - f g_{yz} \\ -f_x g_z - f g_{zx} + f_z g_x + f g_{xz} \\ f_x g_y + f g_{yx} - f_y g_x - f g_{xy} \end{pmatrix}.$$

Upoštevamo, da zaradi zvezne odvedljivosti vrstni red parcialnega odvajanja ni pomemben in je zato

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} f_y g_z - f_z g_y \\ -f_x g_z + f_z g_x \\ f_x g_y - f_y g_x \end{pmatrix},$$

kar pa je ravno $\nabla f \times \nabla g$. *Povsem enako računamo v drugem primeru.*

Ocenjevanje:

- *Zapis po komponentah: 2 točki.*
- *Parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Opažanje, da se dvojni odvodi uničijo: 2 točki.*
- *Izračun* $\nabla f \times \nabla g$: *2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathcal{C}$ poljubna zaključena krivulja z dano orientacijo. Pokažite, da je

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Rešitev: Na krivuljo napnimo poljubno ploskev $\mathcal{S}$. *Po Stokesovem izreku je krivuljni integral enak pretoku rotorja skozi ploskev, če si normalo izberemo tako, da je ploskev pri obhodu krivulje na levi. Ker sta rotorja nasprotnega predznaka, bosta tudi pretoka nasprotnega predznaka in trditev drži.*

Ocenjevanje:

- *Ideja z napenjanjem ploskve: 2 točki.*
- *Zveza s Stokesovim izrekom: 2 točki.*
- *Opažanje, da sta rotorja nasprotno predznačena: 2 točki.*
- *Sklep, da sta pretoka nasprotno predznačena: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

4. (20) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y^{(3)} - 3y' - 2y = 10\sin x\,.$$

a. (10) Poiščite splošno rešitev enačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom je $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$. *Celoštevilske ničle morajo biti delitelji konstantnega člena in takoj najdemo* $\lambda_1 = 2$ *in* $\lambda_2 = -1$. *Ničla* λ_2 *je dvojna. Linearno neodvisne rešitve homogene enačbe so*

$$y_1(x) = e^{2x}\,, \quad y_2(x) = e^{-x} \quad \text{in} \quad y_3(x) = xe^{-x}\,.$$

Potrebujemo še partikularno rešitev. Desno stran enačbe nadomestimo z $10e^{ix}$ *in iščimo rešitev z nastavkom* $y_p(x) = Ae^{ix}$ *(*i *ni ničla karakterističnega polinoma). Vstavimo in dobimo enačbo*

$$-Ai - 3iA - 2A = 10\,,$$

od koder sledi

$$A = -\frac{10}{2+4i} = -\frac{10(2-4i)}{20} = -1 + 2i\,.$$

Partikularna rešitev bo imaginarni del produkta Ae^{ix}, *torej*

$$y_p(x) = 2\cos x - \sin x\,.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$$

za poljubne konstante c_1, c_2 *in* c_3.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničle: 2 točki.*
- *Linearno neodvisne rešitve homogene enačbe: 2 točki.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Partikularna in splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe, za katero je $y(0) = y'(0) = 0$ in je funkcija $y(x)$ omejena, ko $x \to \infty$.

Rešitev: Splošno rešitev že poznamo. Iz pogojev moramo določiti še konstante. Partikularna rešitev y_p *in rešitvi* y_2 *in* y_3 *ostanejo omejene, ko* $x \to \infty$. *Iz tega sledi, da mora biti* $c_1 = 0$, *ker bi sicer rešitev naraščala po absolutni vrednosti čez vse meje. Iz pogoja* $y(0) = 0$ *sledi* $c_2 = -2$, *in iz pogoja* $y'(0) = 0$ *sledi* $c_3 = -1$.

Ocenjevanje:

- *Sklep za* $c_1 = 0$: *3 točke.*
- *Nastavek za rešitev: 3 točke.*
- c_2: *2 točki.*
- c_3: *2 točki.*

5. (20) Kot znano upoštevajte, da velja

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{in} \qquad \int_0^{\pi} \cos^{2m} x \, \mathrm{d}x = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3 \cdot 1 \cdot \pi}{m!\, 2^m} \qquad \text{za } m > 0.$$

a. (10) Naj bo

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos u} \, \mathrm{d}u \, .$$

Izpeljite, da je

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \, .$$

Utemeljite vse vaše korake.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos u} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \cos^k u}{k!} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \int_0^{\pi} \cos^k u \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\pi} \cos^{2k} u \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots\pi}{k!\, 2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2\, 2^{2k}} \end{aligned}$$

Vrsti red seštevanja in integriranja smo lahko zamenjali, ker so členi v vsoti majorizirani z vrsto $\sum_k \pi^k/k!$*, ki seveda konvergira. Upoštevali smo tudi, da je*

$$\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{(2k)!} = \frac{1}{k!\, 2^k} \, .$$

Ocenjevanje:

- *Razvoj integranda v vrsto: 2 točki.*
- *Utemeljitev zamenjave integriranja in seštevanja: 2 točki.*
- *Integriranje vsakega člena: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da velja

$$x^2 I_0'' + x I_0' - x^2 I_0 = 0 \, .$$

Utemeljite vaše korake.

Rešitev: Izračunamo radij konvergence potenčne vrste. Hitro se prepričamo, da je

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0\,.$$

Radij konvergence je $R = \infty$. Vrsto zato lahko povsod poljubno odvajamo po členih. Računamo

$$\begin{aligned}
x^2 I_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+2}}{(k!)^2 2^{2k}}\\
xI_0'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2kx^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}\\
x^2 I_0''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k(2k-1)x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}
\end{aligned}$$

V vseh treh vrstah je najnižja potenca x^2. Seštejemo in dobimo

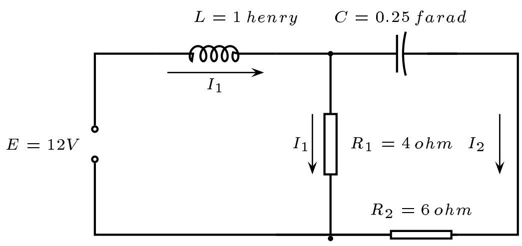
$$\begin{aligned}
x^2 I_0'' + xI_0' - x^2 I_0 &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(k!)^2}\left(2k(2k-1)+2k-4k^2\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Radij konvergence: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje: 2 točki.*
- *Zbiranje členov: 2 točki.*
- *Krajšanje na koncu: 2 točki.*

6. (20) V tokokrogu na sliki 2 naj bo $L = 1H$ (henry), $C = 0.26Fa$ (farad), $R_1 = 4$ ohm in $R_2 = 6$ (ohm). Tokokrog priključimo na napetost $12V$ kot je prikazano na sliki 2. Za toka $I_1(t)$ in $I_2(t)$ velja sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} \dot{I}_1 & = & -4I_1 & + & 4I_2 & + & 12.0 \\ \dot{I}_2 & = & -1.6I_1 & + & 1.2I_2 & + & 4.8 \end{array}$$



Sl. 2 Tokokrog iz naloge 6.

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko rešitev homogenega sistema.

Rešitve: Martika $\mathbf{A}$*, ki pripada sistemu je*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1.6 & 1.2 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom je $P(\lambda) = \lambda^2 + 2.8\lambda + 1.6$ *z ničlama* $\lambda_1 = -2$ *in* $\lambda_2 = -0.8$*. Pripadajoča lastna vektorja sta* $\mathbf{x}_1 = (2,1)$ *in* $\mathbf{x}_2 = (1, 0.8)$*. Vsako rešitev homogenega sistema lahko zapišemo kot*

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-2t}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{-0.8t}\mathbf{x}_2 \,.$$

Stolpca fundamentalne matrike rešitev bosta tudi take oblike, pri čemer mora za prvi stolpec biti izpolnjena enačba $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x_2} = (1,0)$*, za drugi pa* $c_3\mathbf{x}_1 + c_4\mathbf{x_2} = (0,1)$*. Dobimo* $c_1 = 4/3$*,* $c_2 = -5/3$*,* $c_3 = -5/3$ *in* $c_4 = 10/3$*. Fundamentalna matrika rešitev je*

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-0.8t} & -\frac{10}{3}e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{-0.8t} \\ \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-0.8t} & -\frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{8}{3}e^{-0.8t} \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Lastne vrednosti: 2 točki.*
- *Lastna vektorja: 2 točki.*
- *Nastavek za stolpca fundamentalne matrike: 2 točki.*
- *Prvi spolpec: 2 točki.*
- *Drugi stolpec: 2 točki.*

b. (10) Rešite nehomogeno enačbo z začetnima pogojema $I_1(0) = 0$ in $I_2(0) = 0$.

Rešitev: Nehomogeni del enačbe je konstanten, zato bo tudi partikularna rešutev konstantni vektor $\mathbf{a}$. *Nastavek* $\mathbf{y}_p = \mathbf{a}$ *vodi do enačbe*

$$\mathbf{A}\mathbf{a} + \begin{pmatrix} 12 \\ 4.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rešitev enačbe je vektor $\mathbf{a} = (3, 0)$. *Splošna oblika rešitve bo*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}$$

za nek vektor $\mathbf{c}$. *Če želimo zadostiti še začetnemu pogoju, mora biti* $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$, *torej je celotna rešitev*

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8e^{-2t} - 5e^{-0.8t} \\ 4e^{-2t} - 4e^{-0.8t} \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Vektor* $\mathbf{a}$*: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Koeficienti: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*