FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

4. junij 1999

Ime in priimek: ______________________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y)=\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)y-2c$$

za neko konstanto c.

a. (10) Pokažite, da na neki okolici U točke $x_0=0$ obstaja funkcija $g\colon U\to\mathbb{R}$, taka da je $g(0)=c+\sqrt{1+c^2}$ in $f(x,g(x))=0$ za $x\in U$. Izračunajte še $g'(0)$.

Rešitev: Uporabili bomo izrek o implicitni funkciji. Najprej preverimo, da je

$$\begin{aligned} f(0,c+\sqrt{1+c^2}) &= \left(1-\frac{1}{2c^2+2c\sqrt{1+c^2}+1}\right)(c+\sqrt{1+c^2})-2c \\ &= \frac{2c(c+\sqrt{1+c^2})}{c+\sqrt{1+c^2}}-2c \\ &= 0 \end{aligned}$$

Izračunajmo še

$$f_y(x,y)=1+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Vstavimo $x=0$ in $y=c+\sqrt{1+c^2}$ in dobimo

$$f_y(0,c+\sqrt{1+c^2})=1+\frac{1}{(c+\sqrt{1+c^2})^2}\neq 0\,.$$

Po izreku o implicitni funkciji obstaja na neki okolici točke $x_0=0$ funkcija z želenimi lastnostmi.

Za $x\in U$ velja

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \\ &= -\frac{2xy}{y^2-x^2} \end{aligned}$$

Razberemo, da je $g'(0)=0$.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje, da je $f(0,c+\sqrt{1+c^2})=0$: 2 točki.*
- *Preverjanje, da je $f_y(0,c+\sqrt{1+c^2})\neq 0$: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Formula za $g'(0)=0$: 2 točki.*
- *Izračun $g'(0)=0$: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da ima funkcija $g(x)$ v točki $x_0 = 0$ lokalni maksimum.

Rešitev: V točki $x_0 = 0$ bo lokalni maksimum funkcije $g(x)$, če bo $g'(0) = 0$ in $g''(0) < 0$. Vemo, da je $g'(0) = 0$. Odvajajmo zdaj identiteto $f(x, g(x)) = 0$ dvakrat po x. Dobimo najprej

$$f_x + f_y g' = 0$$

in

$$f_{xx} + f_{xy} g' + (f_{xy} + f_{yy} g') g' + f_y g'' = 0\,.$$

Vstavimo $x_0 = 0$ in $y = c + \sqrt{1 + c^2}$ in izračunamo

$$g''(0) = -\frac{f_{xx}(0, c + \sqrt{1 + c^2})}{f_y(0, c + \sqrt{1 + c^2})}$$

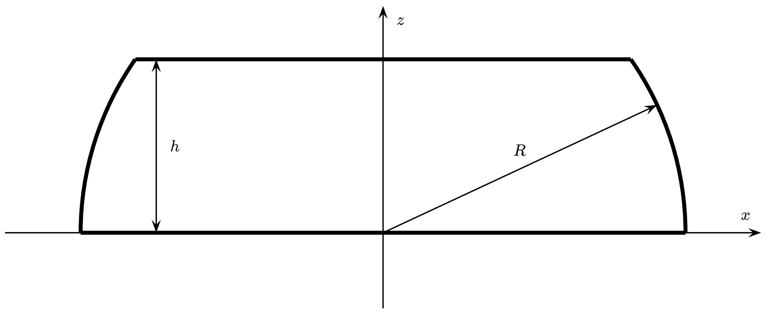
ali

$$g''(0) = -\frac{2}{(c + \sqrt{1 + c^2})^2 (1 + (c + \sqrt{1 + c^2})^2)} < 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje, da je 0 stacionarna točka: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje identitete $f(x, g(x)) = 0$: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje identitete $f(x, g(x)) = 0$: 2 točki.*
- *Izračun drugega odvoda: 2 točki.*
- *Sklep na podlagi drugega odvoda: 2 točki.*

2. (20) Na sliki 1 je del krogle s polmerom R in debeline h, kjer je $h < R$.



Sl. 1 Del krogle med višinama $v = 0$ in $v = h$.

a. (10) Izračunajte površino ukrivljenega dela površine opisanega telesa.

Rešitev: Najprej moramo dano ploskev parametrizirati. Morda najlažja pot je ta, da smatramo ploskev kot graf funkcije $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ *na območju* $G = \{(x,y) \colon R^2 - h^2 \le x^2 + y^2 \le R^2\}$. *Po formuli za površino grafa funkcije je*

$$\begin{aligned}
P &= \int_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_G \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\sqrt{R^2-h^2}}^{R} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi R(-\sqrt{R^2 - r^2})\Big|_{\sqrt{R^2-h^2}}^{R} \\
&= 2\pi R h
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Parametrizacija: 2 točki.*
- *Formula za površino: 2 točki.*
- *Polarne koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte masni vztrajnostni moment dela krogle okrog osi z, torej integral

$$I_{zz} = \int_K (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Najbolj ugodno je vpeljati cilindrične koordinate. Računamo

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^2\cdot r\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^h \frac{(R^2-z^2)^2}{4}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{2}(R^4 z - \frac{2R^2z^3}{3} + \frac{z^5}{5})\Big|_0^h \\
&= \frac{\pi}{2}(R^4 h - \frac{2R^2h^3}{3} + \frac{h^5}{5})
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Prave meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$ naj bo dano z $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo graf funkcije $f(x,y) = 1 - x - y$ na območju $\Delta = \{(x,y)\colon x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$, za normalo pa vedno izberemo $\mathbf{n} = (1,1,1)/\sqrt{3}$.

a. (10) Izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Rešitev: Nalogo lahko rešimo z Gaussovim izrekom. Najprej takoj izračunamo, da je $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 0$. *Ploskev* $\mathcal{S}$ *si lahko predstavljamo kot lice piramide* $P = \{(x,y,z)\colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 0\}$ *nasprotno izhodišču. Opazimo, da je polje vzporedno z osnovnico te piramide v* xy*-ravnini, torej je pretok skozi ta del površine* ∂P *enak 0. Če si za normalo izberemo vedno vektor, ki kaže iz piramide, je za lice v* xz*-ravnini je pretok enak*

$$-\int_{\Delta} x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z$$

in skozi lice v yz*-ravnini*

$$\int_{\Delta} y\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

Pretok skozi ostala lica piramide v koordinatnih ravninah je 0, ravno tako pa tudi celotni pretok. Pretok polja skozi $\mathcal{S}$ *je torej 0.*

Ocenjevanje:

- *Izračun divergence: 2 točki.*
- *Ideja s piramido: 2 točki.*
- *Pretok skozi osnovno ploskev: 2 točki.*
- *Pretoka skozi stranski ploskvi: 2 točki.*
- *Rezultata: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Rešitev: Uporabimo Stokesov izrek. Najprej izračunamo

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (0,0,2)\,.$$

Ker je rotor konstanten, bo odgovor enak $2 \cdot P/\sqrt{3}$, *kjer je* P *površina ploskve* $\mathcal{S}$. *Ploskev* $\mathcal{S}$ *je enakostranični trikotnih s stranico* $\sqrt{2}$.

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\mathrm{d}\mathbf{S} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izračun rotorja: 2 točki.*
- *Citiranje Stokesovega izreka: 2 točki.*
- *Nastavek za ploskovni integral: 2 točki.*
- *Ugotovitev, kakšna je vrednost integrala: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

4. (20) Dan naj bo sistem linearnih diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}\,.$$

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko rešitev sistema.

Rešitev: Najprej izračunamo $P(\lambda) = (\lambda - 2)^2$. *Lastna vrednost je dvojna in ena sama. Pripada ji en sam lastni vektor* $\mathbf{x} = (1,1)$. *Prvo rešitev dobimo kot* $\mathbf{y}_1(t) = e^{2t}\mathbf{x}$. *Drugo, linearno neodvisno rešitev, iščemo z nastavkom* $\mathbf{y}_2 = te^{2t}\mathbf{x} + e^{2t}\mathbf{u}$, *kjer* $\mathbf{u}$ *ustreza enačbi* $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{x}$. *Na široko napisano, rešujemo sistem enačb*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Očitna rešitev je $\mathbf{u} = (0,1)$. *Stolpca fundamentalne matrike rešitev bosta oblike* $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$. *Za prvi stolpec dobimo enačbi*

$$c_1 = 1 \qquad in \qquad c_1 + c_2 = 0$$

z rešitvama $c_1 = 1$ *in* $c_2 = -1$. *Podobno dobimo za drugi stolpec enačbi*

$$c_1 = 0 \qquad in \qquad c_1 + c_2 = 1$$

z rešitvama $c_1 = 0$ *in* $c_2 = 1$. *Dobimo*

$$\mathbf{Y}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} -t+1 & , & t \\ -t & , & t+1 \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Lastne vrednosti in lastni vektorji: 2 točki.*
- *Prva rešitev: 2 točki.*
- *Druga rešitev: 2 točki.*
- *Enačbe za fundamentalno matriko: 2 točki.*
- *Fundamentalna matrika: 2 točki.*

b. (10) Rešite še nehomogeno enačbo

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

pri začetnem pogoju $\mathbf{y}(0) = (0,0)$.

Rešitev: Partikularno rešitev $\mathbf{y}_p$ *iščemo po formuli*

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_p(t) &= \int_0^t \mathbf{Y}(t-s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} te^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Splošna rešitev je oblike $\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$. *Ker že* $\mathbf{y}_p$ *ustreza začetnim pogojem, je že rešitev.*

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 2 točki.*
- *Vstavljanje v nastavek: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Enačbe za začetne pogoje: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

5. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo periodična s periodo 2π in na intervalu $[-\pi, \pi]$ dana z

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - \frac{\pi^2}{3}) .$$

a. (10) Pokažite, da je Fourierova vrsta za $f(x)$ enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} .$$

Utemeljite, da ta vrsta za vsak x konvergira proti $f(x)$.

Rešitev: Funkcija je soda, zato je $b_n = 0$ za vse $n \geq 1$. Zlahka se prepričamo, da je $a_0 = 0$. Za $n \geq 1$ najprej izračunajmo

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, \mathrm{d}x &= \frac{x^2 \sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n} \Big(\frac{x \cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, \mathrm{d}x \Big) \\
&= \pi \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

Iz tega razberemo, da velja zgornji razvoj. Funkcija $f(x)$ je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, zato Fourierova vrsta vedno konvergira proti $f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Sodost: 2 točki.*
- *$a_0 = 0$: 2 točki.*
- *Integracija per partes: 2 točki.*
- *Koeficienti: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Z integriranjem Fourierove vrste po členih dokažite, da je za vsak x

$$\frac{1}{12}(x^3 - \pi^2 x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n^3} .$$

Utemeljite vaše korake. Izpeljite še, da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

Rešitev: Vrsta je majorizirana z vrsto $\sum_n n^{-2}$, ki konvergira, zato lahko členoma integriramo od 0 do x. Dobimo točno želeno formulo.

Vstavimo še $x = \pi/2$. *Leva stran je enaka* $-\pi^3/32$, *na desni pa dobimo*

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\frac{n\pi}{2})}{n^3} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} \sin(\frac{(2k+1)\pi}{2})}{(2k+1)^3} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)}{(2k+1)^3} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3}
\end{aligned}
$$

Iz tega izračunamo želeno vsoto vrste.

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev integriranja po členih: 2 točki.*
- *Integriranje po členih: 2 točki.*
- *Vstavljanje* $\pi/2$*: 2 točki.*
- *Pretvorba vsrte: 2 točki.*
- *Vsota vrste: 2 točki.*

6. (20) Vektorsko polje $\mathbf{u}$ naj opisuje stacionarni tok idealnega fluida, za katerega veljajo Eulerjeve enačbe

$$\rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \, .$$

Predpostavljajte, da je tok izentropen, kar pomeni, da obstaja taka funkcija w (entropija), da je

$$\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla p \, .$$

a. (10) Izpeljite najprej, da vedno velja

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \, .$$

Pojasnilo: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

Rešitev: Zapišimo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. *S temi oznakami je*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \, .$$

Izračunajmo komponente gradienta in dobimo

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x} u_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial y} u_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z} u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial z} u_3 \end{pmatrix} .$$

Izračunajmo še

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{rot}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Zdaj preverimo enakost obeh izrazov.

Ocenjevanje:

- *Interpretacija leve strani: 2 točki.*
- *Izračun gradianta: 2 točki.*
- *Gradient na desni strani: 2 točki.*
- *Vektorsko množenje: 2 točki.*
- *Preverjanje enakosti: 2 točki.*

b. (10) Predpostavite, da ni zunanjih sil, torej $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Naj bo $\mathbf{x}(t)$ pot dana parametrično za $t_1 \le t \le t_2$ in naj velja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Pokažite, da je

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) + w(\mathbf{x}(t))$$

konstantna funkcija na $[t_1, t_2]$.

Namig: Odvajajte ϕ *in uporabite a.*

Rešitev: Po pravilih za odvajanje posrednih funkcij je

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u}))\dot{\mathbf{x}}+\nabla w\cdot\dot{\mathbf{x}} \\
&= (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u}))\mathbf{u}+\nabla w\cdot\mathbf{u} \\
&= (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}+(\frac{1}{\rho}\nabla p)\cdot\mathbf{u} \\
&= (\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\frac{1}{\rho}\nabla p)\cdot\mathbf{u} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Odvod funkcije ϕ je 0, torej je funkcija konstantna.

Ocenjevanje:

- *Pravilno postedno odvajanje prvega člena: 2 točki.*
- *Pravilno posredno odvajanje drugega člena: 2 točki.*
- *Opažanje, da je $\mathbf{u}$ ortogonalen na $\mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u})$: 2 točki.*
- *Uporaba Eulerjevih enačb: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*