FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

5. junij 2000

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo dana funkcija $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x,y,z) = x^2y + e^x + z\,.$$

a. (10) Dokažite, da na primerni okolici U točke $(1,-1)$ obstaja funkcija $g\colon U \to \mathbb{R}$, taka da je $g(1,-1) = 0$ in

$$f(g(y,z),y,z,) = 0 \qquad \text{za } (y,z) \in U.$$

Izračunajte še parcialna odvoda $g_y(1,-1)$ in $g_z(1,-1)$.

Rešitev: Po izreku o implicitni funkciji je potrebno preveriti, da je $f_x(0,1,-1) \neq 0$. Izračunamo

$$f_x(x,y,z) = 2xy + e^x, \qquad \text{torej} \qquad f_x(0,1,-1) = 1 \neq 0\,.$$

Parcialna odvoda izračunamo po formuli

$$g_y(1,-1) = -\frac{f_y(0,1,-1)}{f_x(0,1,-1)} = 0 \qquad g_z(1,-1) = -\frac{f_z(0,1,-1)}{f_x(0,1,-1)} = -1\,.$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje predpostavk izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji v pravilni obliki: 2 točki.*
- *Formula za odvoda g: 2 točki.*
- *Vstavljanje v formulo za odvoda: 2 točki.*
- *Rezultata: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še drugi parcialni odvod $g_{yz}(1,-1)$.

Rešitev: Identiteto $f(g(y,z),y,z) = 0$ odvajamo najprej po z.

$$f_x \cdot g_z + f_z = 0\,.$$

Odvajamo to zadnjo relacijo še po y. Dobimo

$$(f_{xx}\cdot g_y + f_{xy})\cdot g_z + f_x \cdot g_{zy} + f_{zx}\cdot g_y + f_{zy} = 0\,.$$

V vseh dvojnih parcialnih odvodih f moramo vstaviti točko $(0,1,-1)$, v parcialnih odvodih g pa točko $(1,-1)$. Dobimo

$$\begin{array}{lll} f_{xx}(0,1,-1) = 3 & f_{zy}(0,1,-1) = 0 & f_{zx}(0,1,-1) = 0 \\ f_x(0,1,-1) = 1 & f_{xy}(0,1,-1) = 0\,. & \end{array}$$

Upoštevamo še $g_y(1,-1) = 0$ in $g_z(1,-1) = -1$ v zgornji identiteti in dobimo enačbo

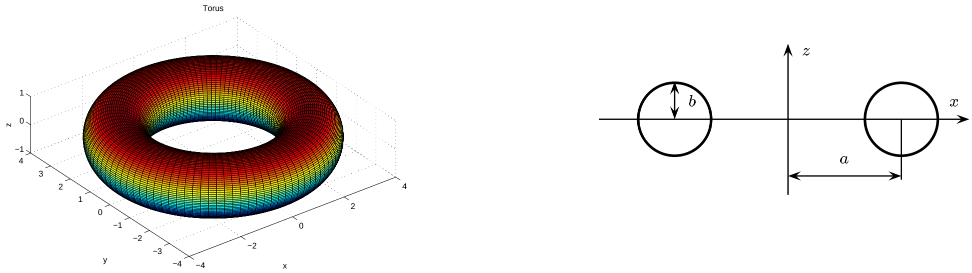
$$(3\cdot 0 + 0)\cdot(-1) + 1\cdot g_{zy}(-1,1) + 0\cdot 0 + 0 = 0\,.$$

Sledi $g_{zy}(1,-1) = 0$.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da odvajamo identiteto: 2 točki.*
- *Prvo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Računanje vseh parcialnih odvodov: 2 točki.*
- *Rezultata: 2 točki.*

2. (20) Na sliki 1 je na levi torus, na desni pa presek torusa z xz-ravnino. Polmera a in b $(a < b)$ sta na prikazana na sliki.



Sl. 1 Torus in presek torusa z xz-ravnino.

a. (10) Površina torusa je dana parametrično s

$$\Phi(u,v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $0 \le v \le 2\pi$. Izračunajte površino torusa.

Rešitev: Površino ploskve dane parametrično izračunamo po formuli

$$P = \int_G |\Phi_u \times \Phi_v| \, du \, dv \,,$$

kjer je G množica parametrov. V našem primeru je

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} -(a + b\cos v)\sin u \\ (a + b\cos v)\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{in} \qquad \Phi_v = \begin{pmatrix} -b\sin v\cos u \\ -b\sin v\sin u \\ b\cos v \end{pmatrix}.$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} b(a + b\cos v)\cos u\cos v \\ b(a + b\cos v)\sin u\cos v \\ b(a + b\cos v)\sin v \end{pmatrix}.$$

Sledi $|\Phi_u \times \Phi_v| = b(a + b\cos v)$. *Ploščina je torej*

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a + b\cos v)\, du dv \\ &= 2\pi b\int_0^{2\pi} (a + b\cos v)\, dv \\ &= 4\pi^2 ab \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Izračun Φ_u in Φ_v: 3 točke.*
- *Izračun $|\Phi_u \times \Phi_v|$: 2 točki.*

- *Pravilno nastavljen integral: 2 točki.*
- *Fubini in rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte masni vztrajnostni moment torusa s polmeroma a in b okrog osi z. Privzemite, da je masna gostota $\rho = 1$.

Rešitev: Označimo torus s T. Izračunati moramo integral

$$I_{zz} = \int_T (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}V\,.$$

Vpeljemo polarne koordinate in računamo po Fubiniju.

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{a-b}^{a+b} r^2 \cdot r \cdot \mathrm{d}r \int_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} \mathrm{d}z \\
&= 4\pi \int_{a-b}^{a+b} r^3 \sqrt{b^2-(r-a)^2} \cdot \mathrm{d}r \\
&= 4\pi b^2 \int_{-1}^{1} (a+bu)^3 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u\,, \quad r-a = bu \\
&= 4\pi b^2 \int_{-1}^{1} (a^3 + 3a^2bu + 3ab^2u^2 + b^3u^3)\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 4\pi b^2 \int_{-1}^{1} (a^3 + 3ab^2u^2)\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u \quad (\mathit{lihost!}) \\
&= 4\pi b^2 \Big(\frac{\pi a^3}{2} + 3ab^2 \int_{-1}^{1} u^2\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u\Big) \\
&= 4\pi b^2 \Big(\frac{\pi a^3}{2} + 3ab^2 \frac{\pi}{8}\Big) \quad (\mathit{per\ partes}) \\
&= 4\pi^2 ab^2 \Big(\frac{a^2}{2} + \frac{3b^2}{8}\Big)
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Pravilno nastavljen integral: 2 točki.*
- *Ideja s polarnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Pretvorba območij in Fubini: 4 točke.*
- *Integriranje in rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$.

a. (10) Izračunajte pretok tega vektorskega polja skozi površino valja, danega z $V = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq b\}$.

Rešitev: Najprej izračunamo divergenco vektorskega polja.

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = x^2 \cdot (3 + 1 + 1) = 5x^2 .$$

Uporabimo Gaussov izrek in v trojni integral uvedemo cilindrične koordinate. Dobimo

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = 5 \int_0^b \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, \mathrm{d}\phi \int_0^a r^3 \mathrm{d}r = \frac{5\pi a^4 b}{4} .$$

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še pretok $\mathbf{F}$ skozi zgornjo polovico površine krogle s polmerom R in izhodiščem v središču. Zgornja polovica je tista, za katero je $z \geq 0$.

Rešitev: Možnosti je več. Ena je ta, da opazimo, da je pretok skozi poljuben del ravnine xy enak nič, ker je polje na tej ravnini vzporedno z njo. Pretok skozi zgornji del krogle torej lahko spet izračunamo po Gaussovem izreku, ker je enak integralu divergence po zgornji polovici krogle. Uvedemo še krogelne koordinate in dobimo

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = 5 \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \sin^2\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^R r^4 \mathrm{d}r = \frac{2\pi R^5}{3} .$$

Upoštevali smo, da je $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta = \int_0^1 (1 - u^2)\, \mathrm{d}u = 2/3$, kar sledi iz vpeljave nove spremenljivke $\cos\theta = u$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z Gaussovim izrekom: 2 točki.*
- *Opažanje, da je pretpk skozi xy ravnino enak 0: 2 točki.*
- *Krogelne koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Dan naj bo sistem enačb

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}\,.$$

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko rešitev sistema.

Rešitev: Karakteristični polinom matrike $\mathbf{A}$ *je* $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$*, ki ima eno samo ničlo* $\lambda = -1$*. Pripadajoči lastni vektor je* $\mathbf{x} = (6, -3)$*. Ena rešitev sistema bo* $y_1(t) = e^{-t}\mathbf{x}$*. Linearno neodvisno rešitev iščemo z nastavkom* $\mathbf{y}_2(t) = t\mathbf{y}_1(t) + e^{-t}\mathbf{u}$*, kjer mora* $\mathbf{u}$ *ustrezati enačbi*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{x}\,.$$

Sledi $\mathbf{u} = (1, 1)$*, torej* $\mathbf{y}_2(t) = te^{-t}\mathbf{x} + e^{-t}\mathbf{u}$*. Stolpca fundamentalne matrike rešitev bosta linearni kombinaciji linearno neodvisnih rešitev. Za konstante dobimo enkrat enačbi*

$$6c_1 + c_2 = 1 \qquad \textit{in} \qquad -3c_1 + c_2 = 0$$

z rešitvijo $c_1 = 1/9$ *in* $c_2 = 1/3$*, drugič pa*

$$6c_1 + c_2 = 0 \qquad \textit{in} \qquad -3c_1 + c_2 = 1\,.$$

z rešitvijo $c_1 = -1/9$ *in* $c_2 = 2/3$*. Fundamentalna matrika rešitev je*

$$\mathbf{Y}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 + 2t & 4t \\ -t & -2t + 1 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Lastna vrednost in lastni vektor: 2 točki.*
- *Prva rešitev: 2 točki.*
- *Nastavek za linearno neodvisno rešitev: 2 točki.*
- *Vektor* $\mathbf{u}$*: 2 točki.*
- *Konstante in rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite še partikularno rešitev nehomogenega sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

pri začetnem pogoju $\mathbf{y}(0) = (0, 0)$.

Rešitev: Najprej potrebujemo partikularno rešitev

$$y(t) = \int_0^t Y(t - s) b(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Vstavimo in dobimo

$$y(t) = e^{-t} \int_0^t \begin{pmatrix} 6s + 1 \\ -3s + 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = e^{-t} \begin{pmatrix} 3t^2 + t \\ -3t^2/2 + t \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 2 točki.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Upoštevalje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

5. (20) Za vsak $n \geq 0$ definiramo funkcijo $J_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{(k+n)!\; k!\; 2^{2k+n}}\,.$$

a. (10) Pokažite, da je radij konvergence zgornje potenčne vrste za vsak n enak $\rho = \infty$ in pokažite, da je za $n \geq 1$

$$\left[\left(\frac{x}{2}\right)^n J_n(x)\right]' = \left(\frac{x}{2}\right)^n J_{n-1}(x)\,.$$

Utemeljite vaše korake.

Rešitev: Za radij konvergence moramo izračunati limito

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+n)!\; k! 2^{2k+n}}{(k+n+1)!(k+1)! 2^{2k+n+2}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4(k+n+1)(k+1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Radij konvergence je torej $\rho = \infty$. Za dokaz enakosti zapišemo

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2n}}{(k+n)!\; k!\; 2^{2k+2n}}\,.$$

Ker ta vrsta povsod konvergira, jo lahko členoma odvajamo in dobimo

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{x}{2}\right)^n J_n(x)\right]' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+n) x^{2k+2n-1}}{(k+n)!\; k!\; 2^{2k+2n}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2n-1}}{(k+n-1)!\; k!\; 2^{2k+2n-1}} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n-1}}{(k+n-1)!\; k!\; 2^{2k+n-1}} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^n J_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula za radij konvrgence: 2 točki.*
- *Radij konvergence: 2 točki.*
- *Razvoj produkta v potenčno vrsto: 2 točki.*
- *Utemeljitev odvajanja po členih: 2 točki.*
- *Izračun in primerjava koeficientov: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je za $n \geq 1$

$$\int_0^x J_{n+1}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x J_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u - 2J_n(x)\,.$$

Utemeljite vse vaše korake.

Namig: Levo in desno stran razvijte v potenčno vrsto.

Rešitev: Razvijmo najprej v potenčno vrsto levo stran enačbe. Ker potenčna vrsta povsod konvergira, lahko zamenjamo vrstni red seštevanja in integriranja in dobimo

$$\begin{aligned}
\int_0^x J_{n+1}(u)\,\mathrm{d}u &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{2k+n+1}}{(k+n+1)!\;k!\;2^{2k+n+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+n+1}(k+n+1)!\;k!} \int_0^x u^{2k+n+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\; x^{2(k+1)+n}}{2^{2k+n+1}\;(2k+n+2)(k+n+1)!\;k!}\,.
\end{aligned}$$

Podobno razvijemo člen na desni strani in dobimo

$$\begin{aligned}
\int_0^x J_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{2k+n-1}}{(k+n-1)!\;k!\;2^{2k+n-1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+n-1}(k+n-1)!\;k!} \int_0^x u^{2k+n-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k+n-1}(2k+n)(k+n-1)!\;k!}\,.
\end{aligned}$$

Za dokaz enakosti primerjamo koeficiente pri potencah x na levi in desni strani enakosti. Najmanjša potenca na levi je x^{n+2}, nadaljne potence pa so oblike x^{n+4}, x^{n+6}, ..., torej oblike x^{n+2k} za $k \geq 1$. Koeficient pri x^{n+2k} na levi je

$$\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k+n-1}(2k+n)(k+n)!(k-1)!}$$

na desni pa

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^k}{2^{2k+n-1}(2k+n)(k+n-1)!\;k!} &- 2\frac{(-1)^k}{2^{2k+n}(k+n)!k!} \\
&= \frac{2(-1)^k}{2^{2k+n}(2k+n)(k+n)!k!}((k+n)-(2k+n)) \\
&= \frac{(-1)^k}{2^{2k+n-1}(k+n)!k!}(-k) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k+n-1}(k+n)!(k-1)!}\,.
\end{aligned}$$

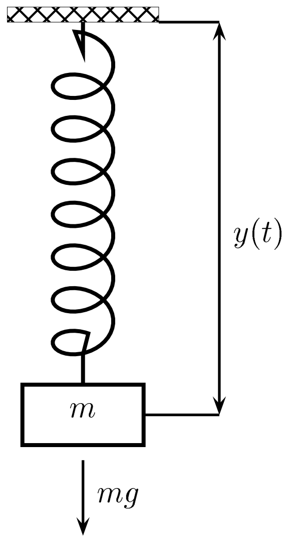
Preveriti moramo le še, da na desni ni potence x^n, Koeficient pri tej potenci na desni je

$$\frac{1}{2^{n-1}n!} - 2\frac{1}{2^n n!} = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev integriranja po členih: 2 točki.*
- *Prvo integriranje: 2 točki.*
- *Drugo integriranje: 2 točki.*
- *Primerjanje koeficientov: 2 točki.*
- *Primerjanje koeficientov pri x^n: 2 točki.*

6. (20) Utež z maso m visi na vzmeti s koeficientom k. V ravnovesni legi je vzmet dolga l. Funkcija $y(t)$ naj opisuje razdaljo težišča uteži od točke, kjer je pritrjena vzmet, kot je prikazano na sliki.



Slika 1 Utež na vzmeti.

Funkcija y ustreza diferencialni enačbi

$$m\ddot{y} = mg + k(l - y)\,.$$

a. (10) Poiščite rešitev zgornje diferencialne enačbe pri začetnih pogojih $y(0) = l$ in $\dot{y}(0) = 0$.

Rešitev: Enačbo prepišimo v običajno obliko

$$m\ddot{y} + ky = mg + kl\,,$$

kar je nehomogena linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Linearno neodvisni rešitvi homogenega dela enačbe sta

$$y_1(t) = \cos(\omega t) \qquad in \qquad y_2(t) = \sin(\omega t)\,,$$

kjer je $\omega = \sqrt{k/m}$. *Potrebujemo še partikularno rešitev. Ker je desna stran konstanta, bo tudi partikularna rešitev konstanta in dobimo* $y_p(t) = g/\omega^2 + l$. *Splošna rešitev bo oblike*

$$y(t) = \frac{g}{\omega^2} + l + c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\,.$$

Določiti moramo še konstante c_1 *in* c_2. *Iz začetnih pogojev dobimo*

$$0 = \frac{g}{\omega^2} + c_1 \qquad in \qquad 0 = c_2\omega\,.$$

Sledi

$$y(t) = l + \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)).$$

Ocenjevanje:

- *Ničli karakterističnega polinoma: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbi za konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Rešite enačbo še pri začetnih pogojih $y(0) = mg/k + l$ in $\dot{y}(0) = 0$.

Rešitev: Iz a. vemo, da je splošna rešitev enačbe enaka

$$y(t) = \frac{g}{\omega^2} + l + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

Začetni pogoji pripeljejo do enačb

$$\frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} + c_1 \qquad in \qquad 0 = c_2 \omega.$$

Sledi $c_1 = c_2 = 0$. *Opomba: Rešitev je očitna, ker sta pri danem odmiku sili težnosti in vzmeti uravnovešeni.*

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbi za konstanti: 2 točki.*
- *Rešitev: 6 točk.*