FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

11. junij 2010

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo $u(s,t)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, za katero velja

$$u_{ss} + u_{tt} = 0\,.$$

a. (10) Definiranjte funkcijo $v(x,y)$ s predpisom

$$v(x,y) = u\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Izračunajte

$$v_{xx} + v_{yy}\,.$$

b. (10) Definirajte funkcijo $v(x,y)$ s predpisom

$$v(x,y) = u\left(e^y \cos x, e^y \sin x\right)\,.$$

Izračunajte

$$v_{xx} + v_{yy}\,.$$

2. (20) Naj bodo a, b, c in d pozitivna števila, za katere velja $a+b+c+d=1$. Na območju $\Delta = \{(x,y,z)\colon x>0, y>0, z>0, x+y+z<1\}$ naj bo dana funkcija

$$f(x,y,z) = a\log x + b\log y + c\log z + d\log(1-x-y-z)\,.$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije f na Δ in jih klasificirajte.

b. (10) Naj bo $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$ dana z

$$g(x,y,z) = \log x - \log y + \log z - \log(1-x-y-z)\,.$$

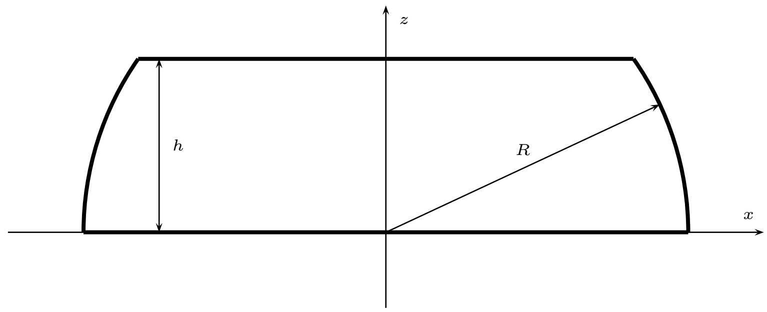
Pokažite, da je v točki (x,y,z), kjer je

$$x = (a+b)(a+d)\,, \quad y = (a+b)(b+c) \quad \text{in} \quad z = (b+c)(c+d)\,.$$

lahko ekstrem funkcije $f(x,y,z)$ pri pogoju $g(x,y,z)=0$.

Namig: Preverite, da je $1-x-y-z = (a+d)(c+d)$.

3. (20) Na sliki 1 je del krogle s polmerom R in debeline h, kjer je $h < R$.



Sl. 1 Del krogle med višinama $v = 0$ in $v = h$.

a. (10) Izračunajte prostornino opisanega telesa.

b. (10) Izračunajte masni vztrajnostni moment dela krogle okrog osi z, torej integral

$$I_{zz} = \int_K (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

4. (20) Ploskev naj bo dana parametrično z

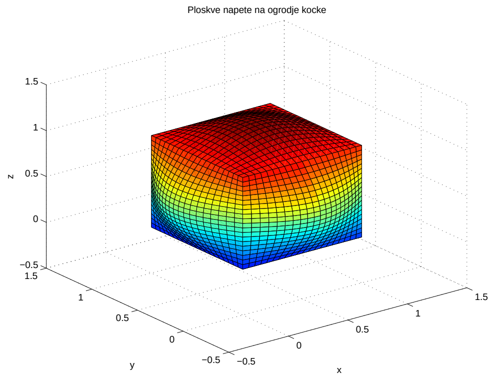
$$\Phi(u,v) = \left(a\sqrt{1+v^2}\cos u,\ a\sqrt{1+v^2}\sin u,\ v\right)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $-1 \leq v \leq 1$.

a. (10) Poiščite vektor $\mathbf{n}$, ki je pravokoten na ploskev v točki $(\sqrt{2}a, 0, 1)$.

b. (10) Naj bo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev v smeri normale z negativno z-komponento za $z > 0$.

5. (20) Na rob vsake od ploskev kocke $Q = [0,1]^3$ napnemo gladko ploskev, tako da te ploskve omejujejo novo telo T. Primer takega telesa je na sliki 2.



Slika 2 Telo T, ki ga omejujejo ploskve, napete na ogrodje kocke.

Definirajte $\mathbf{G}(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)$ in $\mathbf{F}(x,y,z) = (-2z, -2x, -2y)$.

a. (10) Prepričajte se, da velja $\mathbf{rot}(\mathbf{G}) = \mathbf{F}$. Utemeljite, da je

$$\int_{\partial Q} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial T} \mathbf{G}\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Za normalo vedno izberemo vektor, ki kaže iz telesa.

b. (10) Izračunajte

$$\int_{\partial T} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Za normalo izberemo vektor, ki kaže iz telesa.