FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

8. junij 2012

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo funkcija $f(u,v)$ za poljuben $-\infty < u < \infty$ in $v > 0$ dana z

$$f(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v}}\, e^{-\frac{u^2}{2v}} .$$

a. (10) Izračunajte

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial f}{\partial v} .$$

Rešitev: Računamo

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{u}{v^{3/2}}\, e^{-\frac{u^2}{2v}}$$

in

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -\frac{1}{v^{3/2}}\, e^{-\frac{u^2}{2v}} + \frac{u^2}{v^{5/2}}\, e^{-\frac{u^2}{2v}} .$$

Po drugi strani je

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{1}{2v^{3/2}}\, e^{-\frac{u^2}{2v}} + \frac{u^2}{2v^{5/2}}\, e^{-\frac{u^2}{2v}} .$$

Sledi

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0 .$$

Ocenjevanje:

- *Parcialni odvod po u: 2 točki.*
- *Drugo parcialni odvod po u: 2 točki.*
- *Parcialni odvod po v: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo funkcija $F(x,y)$ za $-\infty < x < \infty$ in $y > 0$ dana z

$$F(x,y) = e^{y/2} f\left(xe^{y/2}, e^y - 1\right) .$$

Izračunajte

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{x}{2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{F}{2} - \frac{\partial F}{\partial y} .$$

Rešitev: Računamo po pravilih za odvajanje sestavljenih funkcij. Označimo

$$u(x,y) = xe^{y/2} \qquad \text{in} \qquad v(x,y) = e^y - 1 .$$

Dobimo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{y/2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = e^y \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = e^y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = e^{3y/2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} .$$

Po drugi strani je

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{y/2} \cdot f + e^{y/2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) .$$

Odvajamo in dobimo

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{y/2} \cdot f + e^{y/2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{x e^{y/2}}{2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot e^{y} \right) .$$

Poenostavimo v

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{y/2} \cdot f + \frac{1}{2} x e^{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + e^{3y/2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} .$$

Sestavimo in dobimo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{x}{2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{F}{2} - \frac{\partial F}{\partial y} = \\ & \quad = \; e^{3y/2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{1}{2} e^{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (x - x) + \frac{1}{2} (F - e^{y/2} f) \\ & \quad = \; 0 . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Parcialni odvod po x: 2 točki.*
- *Drugo parcialni odvod po x: 2 točki.*
- *Parcialni odvod po y: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f(x,y)$ naj bo dana z

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3axy$$

za $a > 0$.

a. (10) Najdite stacionarne točke funkcije $f(x,y)$ in ugotovite, ali so lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3ay = 0 \qquad in \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 3ax = 0\,.$$

Če je $x = 0$, mora biti tudi $y = 0$. Ena točka je $(0,0)$. Sicer pa prvo enačbo množimo z x, drugo z y in odštejemo. Sledi $x^3 = y^3$, torej $x = y$. Sledi $x^2 + ax = 0$, torej je točka $(-a,-a)$. Izračunamo še

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3a \\ 3a & 6y \end{pmatrix}$$

Sledi

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 3a & 0 \end{pmatrix}.$$

torej je matrika indefinitna in je točka sedlo. Nadaljujemo

$$Hf(a,a) = \begin{pmatrix} 6a & 3a \\ 3a & 6a \end{pmatrix}.$$

Diagonalna elementa sta pozitivna, determinanta pa tudi. Stacionarna točka je lokalni minimum.

Ocenjevanje:

- *g_x, g_y: 2 točki.*
- *Stacionarne točke: 2 točki.*
- *Drugi parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Hessejeva matrika: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je točka $(3a/2, 3a/2)$ možen vezani ekstrem funkcije $g(x,y) = (x-2a)^2 + (y-2a)^2$ pri pogoju $f(x,y) = 0$.

Rešitev: Po Lagrangu definiramo

$$F(x,y) = g(x,y) - \lambda f(x,y)\,.$$

Preverimo vez v točki. Parcialno odvajamo in parcialne odvode izenačimo z 0. Dobimo enačbi

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= 2(x-2a) - \lambda(3x^2 - 3ay) &= 0 \\ \tfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 2(y-2a) - \lambda(3y^2 - 3ax) &= 0\,. \end{aligned}$$

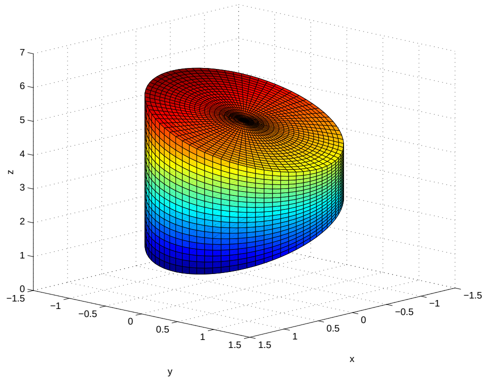
Z vstavljanjem ugotovimo, da točka $(3a/2, 3a/2)$ ustreza enačbama pri $\lambda = -4/9a$.

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Parcialna odvoda: 2 točki.*
- *Preverjanje vezi: 2 točki.*
- *Preverjanje enačb: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

3. (20) Naj bosta a, b dani števili z $b > a + 2$. Ravnini $z = a - x$ in $z = b - y$ iz neskončnega valja $x^2 + y^2 \leq 1$ izrežeta telo na sliki 1. V bolj matematičnih oznakah je

$$G = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 \leq 1, a - x \leq z \leq b - y\}\,.$$



Sl. 1 Telo G nastane tako, da neskončen valj prerežemo z dvema ravninama.

a. (10) Izračunajte prostornino telesa G.

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
V &= \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{a-r\cos\phi}^{b-r\sin\phi} \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} (b - a - r\sin\phi + r\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi(b-a) \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \\
&= \pi(b-a)\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še masni vztrajnostni moment telesa G okrog osi z, torej integral

$$I_{zz} = \rho \int_G (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \rho \int_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \rho \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{a-r\cos\phi}^{b-r\sin\phi} \mathrm{d}z \\
&= \rho \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} (b-a-r\sin\phi+r\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi(b-a) \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\rho\pi(b-a)}{4}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično z

$$\Phi(u,v) = \left(\sqrt{1-v^2}\cos u, \sqrt{1-v^2}\sin u, v\right)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $-1 \leq v \leq 1$.

a. (10) Izračunajte enotski normalni vektor na ploskev v točki $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = \left(-\sqrt{1-v^2}\sin u, \sqrt{1-v^2}\cos u, 0\right)$$

in

$$\Phi_v = \left(-\frac{v\cos u}{\sqrt{1-v^2}}, -\frac{v\sin u}{\sqrt{1-v^2}}, 1\right).$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = \left(\sqrt{1-v^2}\cos u, \sqrt{1-v^2}\sin u, v\right).$$

Ker je vektorski produkt kar Φ, je $\mathbf{n} = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$.

Ocenjevanje:

- Φ_u: *2 točki.*
- Φ_v: *2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*
- *Točka (u,v) ali sklep: 2 točki.*
- $\mathbf{n}$: *2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (y-z, z-x, x-y)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$.

Rešitev: Računamo

$$\mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) = (y-z, z-x, x-y) \cdot (x,y,z) = 0\,.$$

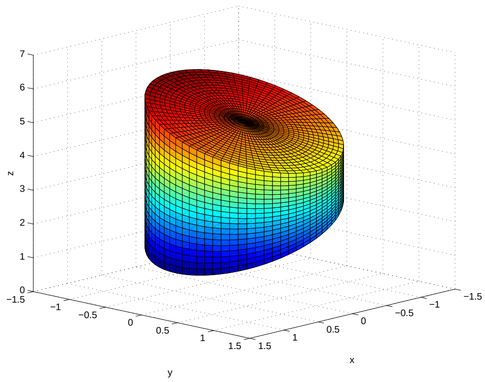
Pretok je enak 0.

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Množenje: 2 točki.*
- *Ugotovitev, da je produkt enak* 0*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bosta a, b dani števili z $b > a + 2$. Ravnini $z = a - x$ in $z = b - y$ iz neskončnega valja $x^2 + y^2 \leq 1$ izrežeta telo na sliki 2. V bolj matematičnih oznakah je

$$G = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 \leq 1, a - x \leq z \leq b - y\} .$$



Sl. 2 Telo G nastane tako, da neskončen valj prerežemo z dvema ravninama.

a. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z)$. Izračunajte pretok polja skozi zgornjo in spodnjo ploskev telesa G. Za normalo vedno izberite vektor, ki kaže iz telesa.

Namig: Lahko upoštevate, da je pretok polja $\mathbf{F}$ *skozi graf funkcije* $f(x, y)$ *nad območjem* H *dan z*

$$\int_H (-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, .$$

Pri tem za normalen vektor izberemo $(-f_x, -f_y, 1)$.

Rešitev: Zgornja ploskev je graf funkcije $z = b - y$ *nad krogom* $H = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Po namigu je pretok skozi zgornjo ploskev enak*

$$\int_H (y^3 + b - y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \pi b \, .$$

Preverimo tudi, da normalen vektor kaže v pravo smer. Podobno za spodnjo ploskev dobimo pretok $-\pi a$.

Ocenjevanje:

- *Kaj je* $f(x, y)$*: 2 točki.*
- *Parcialni dovodi: 2 točki.*
- *Vstavljanje v formulo: 2 točki.*
- *Integriranje in preverjanje normal: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte pretok polja $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z)$ skozi tisti del površine telesa G, ki sovpada s površino neskončnega valja. Za normalo izberite vektor, ki kaže iz telesa.

Rešitev: Izračunamo $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3(x^2 + y^2)$. *Integral te funkcije smo izračunali v 3. nalogi, tako da je pretok skozi celotno površino po Gaussu enak* $3\pi(b - a)/4$.

Skupni pretok polja skozi ravni ploskvi je enak $\pi(b-a)$. *Iskani pretok je* $-\pi(b-a)/4$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z dodanima ploskvama: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Pretok skozi dodani ploskvi: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*