FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

22. junij 2012

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f(u, v)$ naj bo na definicijskem območju dvakrat zvezno odvedljiva. Naj bosta tudi $u(x, y)$ in $v(x, y)$ dvakrat zvezno odvedljivi. Definiramo sestavljeno funkcijo

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)) .$$

a. Izpeljite, da velja

$$\begin{aligned} F_{xx} + F_{yy} &= \\ &= f_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + f_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + 2f_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \\ &\qquad + f_u(u_{xx} + u_{yy}) + f_v(v_{xx} + v_{yy}) . \end{aligned}$$

Rešitev: Računamo po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij. Računamo

$$F_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x .$$

Računamo

$$F_{xx} = (f_{uu}u_x + f_{uv}v_x)u_x + f_u u_{xx} + (f_{uv}u_x + f_{vv}v_x)v_x + f_v v_{xx} .$$

Podobno je

$$F_{yy} = (f_{uu}u_y + f_{uv}v_y)u_y + f_u u_{yy} + (f_{uv}u_y + f_{vv}v_y)v_y + f_v v_{yy} .$$

S seštevanjem sledi želeni izraz.

Ocenjevanje:

- *F_x: 2 točki.*
- *F_{xx}: 2 točki.*
- *F_y: 2 točki.*
- *F_{yy}: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*

b. (10) Predpostavite, da je funkcija $f(u, v)$ definirana za $u > 0$ in $-\pi/2 < v < \pi/2$ in zadošča enačbi

$$f_{uu} + f_{vv} = 0 .$$

Funkcijo $F(x, y)$ za $x > 0$ definiramo s predpisom

$$F(x, y) = f\left(\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2), \operatorname{arctg}(y/x)\right) .$$

Izračunajte $F_{xx} + F_{yy}$.

Rešitev: Označimo

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) \qquad \textit{in} \qquad v(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x) .$$

Velja

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \textit{in} \qquad u_{xx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ter

$$v_x = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \textit{in} \qquad v_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Računamo dalje

$$u_y = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \textit{in} \qquad u_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ter

$$v_y = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \textit{in} \qquad v_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Opazimo, da je $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$ *in*

$$u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 = \frac{1}{x^2+y^2}\,.$$

Opazimo $u_x v_x + u_y v_y = 0$. *Ostane*

$$\frac{1}{x^2+y^2}(f_{uu} + f_{vv}) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- u_x *in* u_{xx}*: 2 točki.*
- v_x *in* v_{xx}*: 2 točki.*
- *Členi pri dvojnih odvodih: 2 točki.*
- *Členi pri enojnih odvodih: 2 točki.*
- *Poenostavitev in rezultat: 2 točki.*

2. (20) Komet leti po krivulji dani implicitno z enačbo

$$(a^2-b^2)x^2+4abxy-(a^2-b^2)y^2=1$$

za $a,b>0$ in $a^2+b^2=1$. Zamislite si, da je zemlja v izhodišču koordinatnega sistema. Izračunati želimo najmanjšo možno razdaljo kometa od zemlje.

a. (10) Pokažite, da točka (x,y), v kateri bo komet najbližje zemlji, ustreza enačbama

$$x-\lambda\left((a^2-b^2)x+2aby\right)=0$$

in

$$y-\lambda\left(2abx-(a^2-b^2)y\right)=0$$

za nek λ. Ugotovite še, da je $x^2+y^2=\lambda$.

Namig: Za drugo vprašanje množite prvo enačbo z x, drugo z y in seštejte.

Rešitev: Definirajmo

$$f(x,y)=x^2+y^2 \qquad \textit{in} \qquad g(x,y)=(a^2-b^2)x^2+4abxy-(a^2-b^2)y^2-1\,.$$

Iščemo ekstrem funkcije $f(x,y)$ pri pogoju $g(x,y)=0$. Opomba: x^2+y^2 je sicer kvadrat razdalje, vendar doseže razdalja minimum natanko takrat, ko doseže minimum njen kvadrat. Po Lagrangeu sestavimo novo funkcijo

$$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)\,.$$

Odvajamo najprej parcialno na x in potem na y in izenačimo z 0. Po krajšanju z 2 dobimo natanko želene enačbe.

Množimo prvo od enačb z x in drugo z y in seštejmo. Dobimo

$$x^2+y^2-\lambda\left((a^2-b^2)x^2+4abxy-(a^2-b^2)y^2\right)=0\,.$$

Izraz v oklepaju je za točke na krivulji enak 1, torej je $x^2+y^2=\lambda$.

Ocenjevanje:

- *Razdalja: 2 točki.*
- *Lagrangeov nastavek: 2 točki.*
- *Prvo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *$x^2+y^2=\lambda$: 2 točki.*

b. (10) Poiščite točko na krivulji, ki je najbližja zemlji.

Namig: Enačbi sta homogen sistem linearnih enačb. Tak ima rešitev različno od (0,0) le, če je determinanta sistema enaka 0. Poleg tega vemo, da je $\lambda>0$.

Rešitev: Rešiti moramo enačbi

$$x-\lambda\left((a^2-b^2)x+2aby\right)=0$$

in

$$y - \lambda\left(2abx - (a^2 - b^2)y\right) = 0\,.$$

Prepišimo

$$\begin{array}{rcrcl}(1-\lambda(a^2-b^2))x & - & 2\lambda aby & = & 0\\ -2\lambda abx & + & (1+\lambda(a^2-b^2))y & = & 0\end{array}$$

Ta homogen sistem linearnih enačb ima netrivialno rešitev, če velja

$$(1-\lambda(a^2-b^2))(1+\lambda(a^2-b^2)) - 4\lambda^2a^2b^2 = 0\,.$$

Preuredimo in upoštevamo $a^2 + b^2 = 1$*. Dobimo*

$$1 - \lambda^2((a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2) = 1 - \lambda^2\,.$$

Sledi $\lambda = \pm 1$*. Iz a. vemo, da je* $\lambda = x^2 + y^2$*, zato pride v poštev le* $\lambda = 1$*. Enačba*

$$(1-\lambda(a^2-b^2))x - 2\lambda aby = 0$$

postane

$$2b^2x - 2aby = 0\,,$$

torej je $bx = ay$*. Enačbi ustreza točka* (a, b)*, ki je tudi na krivulji* $g(x, y) = 0$*. Ta točka je torej najbližja.*

Ocenjevanje:

- *Prepis v sistem: 2 točki.*
- *Determinanta: 2 točki.*
- *Preureditev in rešitve za* λ*: 2 točki.*
- *Enačba za* x *in* y*: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

3. (20) Naj bo G valj s polmerom R, osnovno ploskvijo na xy ravnini, ki ima za os kar os z, višina pa je h. V matematičnih oznakah je

$$G = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 \leq R, 0 \leq z \leq h\}.$$

a. (10) Masni vztrajnostni moment okrog izhodišča za valj s konstantno gostoto ρ je definiran kot

$$I = \rho \int_G (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Izračunajte I in pokažite, da je

$$I = m \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) ,$$

kjer je m masa valja.

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate, Računamo

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_G (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R r \, \mathrm{d}r \int_0^h (r^2 + z^2) \, \mathrm{d}z \\ &= 2\pi\rho \int_0^R r \left(hr^2 + \frac{h^3}{3} \right) \mathrm{d}r \\ &= 2\pi\rho \left(\frac{hR^4}{4} + \frac{R^2 h^3}{6} \right) . \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $m = \pi\rho R^2 h$ in sledi

$$I = m \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) .$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Valj prisekamo z ravnino dano z enačbo

$$z = \frac{2h}{3} - \frac{xh}{3R} .$$

Dobimo telo G_1. Izračunajte

$$I = \rho \int_{G_1} (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate in računamo.

$$
\begin{aligned}
I &= \rho \int_{G_1} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \rho \int_0^R r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\frac{2h}{3}-\frac{hr\cos\phi}{3R}} (r^2+z^2)\,\mathrm{d}z \\
&= \rho \int_0^R r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \left[r^2 \left(\frac{2h}{3} - \frac{hr\cos\phi}{3R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{3} - \frac{hr\cos\phi}{3R}\right)^3 \right] \mathrm{d}\phi \\
&= \rho \int_0^R \left[\frac{4\pi h r^3}{3} + \frac{2\pi r}{3}\left(\frac{2h}{3}\right)^3 + \frac{2\pi h^3 r^3 \pi}{27R^2} \right] \mathrm{d}r \\
&= \rho \left(\frac{\pi h R^4}{3} + \frac{8\pi h^3 R^2}{81} + \frac{\pi h^3 R^2}{54} \right).
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje in rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično s

$$\Phi(u,v) = (\cos v \cos(u+v), \cos v \sin(u+v), \sin v)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $-\pi/2 \le v \le \pi/2$.

a. (10) Izračunajte normalo na ploskev v točki $T(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = (-\cos v \sin(u+v), \cos v \cos(u+v), 0)$$

in

$$\begin{aligned}\Phi_v &= \\ &= (-\sin v \cos(u+v) - \cos v \sin(u+v), -\sin v \sin(u+v) + \cos v \cos(u+v), \cos v)\ .\end{aligned}$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = \big(\cos^2 v \cos(u+v), \cos^2 v \sin(u+v), \cos v \sin v\big)\ .$$

Opazimo, da je vektorski produkt kolinearen Φ, tako da je normalni vektor v točki T kar

$$\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\,.$$

Ocenjevanje:

- *Φ_u: 2 točki.*
- *Φ_v: 2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki,*
- *Kolinearnost: 2 točki.*
- *Normalni vektor: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}\int_{[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} \mathbf{F}\cdot(\Phi_u \times \Phi_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \int_{[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} \cos v |\Phi|^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} \cos v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= 2\pi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v\,\mathrm{d}v \\ &= 4\pi\ .\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F} = (x, y, z)$, ploskev $\mathcal{S}$ pa naj bo graf funkcije $f(x, y) = a^2 - x^2 - y^2$ na območju $K = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

a. (10) Izračunajte prostornino telesa, ki ga omejujeta graf funkcije $f(x, y)$ in krog $K = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

Rešitev: Vpeljemo polarne koordinate in računamo

$$\begin{aligned} V &= \int_K (a^2 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a (a^2 - r^2)\,r\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left(\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{\pi a^4}{2}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Zapis integrala: 2 točki.*
- *Polarne koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Z uporabo Gaussovega izreka izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$. Normalo izberemo tako, da ima pozitivno z-komponento.

Rešitev: Izračunamo $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 3$. *Graf funkcije* $f(x, y)$ *lahko "zapremo" s krogom* K *in dobimo površino telesa, normala pa je na grafu* $f(x, y)$ *v skladu z Gaussovim izrekom. Opazimo tudi, da je na dodani ploskvi vektorsko polje vzporedno s ploskvijo, tako da je tam pretok enak* 0. *Pretok skozi graf* $f(x, y)$ *je tako enak*

$$\int_G \mathrm{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}V = 3V = \frac{3\pi a^4}{2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Dodajanje kroga: 2 točki.*
- *Preverjanje normal: 2 točki.*
- *Pretok skozi K: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*