FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

7. junij 2013

Ime in priimek: ________________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo $g(u)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija za $-\infty < u < \infty$. Definirajte funkcijo $F(x,y)$ za $-\infty < x < \infty$ in $y > 0$ s predpisom

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} g\left(\frac{x^2}{2y}\right) .$$

a. (10) Izrazite

$$\frac{1}{2}F_{xx} - F_y$$

z odvodi funkcije $g(u)$.

Rešitev: Računamo

$$F_x = \frac{x}{y^{3/2}} g'\left(\frac{x^2}{2y}\right)$$

in

$$F_{xx} = \frac{1}{y^{3/2}} g'\left(\frac{x^2}{2y}\right) + \frac{x^2}{y^{5/2}} g''\left(\frac{x^2}{y}\right) .$$

Računamo

$$F_y = -\frac{1}{2y^{3/2}} g\left(\frac{x^2}{2y}\right) - \frac{x^2}{2y^{5/2}} g'\left(\frac{x^2}{2y}\right) .$$

Pišimo $u = x^2/y$. Sestavimo in sledi

$$\frac{1}{2}F_{xx} - F_y = \frac{1}{2y^{3/2}}\left(g'(u) + g(u)\right) + \frac{1}{2y^{5/2}}\left(g''(u) + g'(u)\right) .$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo za odvajanje produkta: 2 točki.*
- *F_x: 2 točki.*
- *F_{xx}: 2 točki.*
- *F_y: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*

b. (10) Izberite funkcijo $g(u)$ tako, da bo

$$\frac{1}{2}F_{xx} - F_y = 0 .$$

Rešitev: Iz prvega dela naloge sledi, da bi moralo biti $g'(u) + g(u) = 0$ in $g''(u) + g'(u) = 0$. Funkcija, ki temu ustreza, je $g(u) = e^{-u}$. Z vstavljanjem ugotovimo, da trditev drži.

Ocenjevanje:

- *Izbira $g(u)$: 2 točki.*
- *Preverjanje prvega izraza: 2 točki,*
- *Preverjanje drugega izraza: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2} - 2x^2 - 8y^2\,.$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije $f(x,y)$ in ugotovite, ali so lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.

Rešitev: Parcialno odvajamo in dobimo

$$f_x(x,y) = -2xe^{-x^2-y^2} - 4x \qquad \textit{in} \qquad f_y(x,y) = -2ye^{-x^2-y^2} - 16y\,.$$

Parcialna odvoda izenačimo z 0*. Edina rešitev zgornjega sistema je* $(0,0)$*. Izračunamo še Hessejevo matriko v točki* $(0,0)$*.*

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (4x^2-2)e^{-x^2-y^2} - 4 & 4e^{-x^2-y^2}xy \\ 4e^{-x^2-y^2}xy & (4y^2-2)e^{-x^2-y^2} - 16 \end{pmatrix},$$

torej je

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

Hessejeva matrika je v točki $(0,0)$ *negativno definitna, zato je točka* $(0,0)$ *lokalni maksimum.*

Ocenjevanje:

- *Parcialna odvoda: 2 točki.*
- *Stacionarna točka: 2 točki.*
- *Drugi parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Hessejava matrika: 2 točki.*
- *Negativna definitnost: 2 točki.*

b. (10) Poiščite možne ekstreme funkcije f pri pogoju $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

Rešitev: Člen $e^{-x^2+y^2}$ *lahko izpustimo, ker je na množici* $\{(x,y)\colon x^2+y^2=1\}$ *konstanten. Sestavimo Lagrangovo funkcijo* $F(x,y) = -2x^2 - 8y^2 - \lambda(x^2+y^2)$ *in njene parcialne odvode izenačimo z* 0*. Dobimo enačbi*

$$\begin{aligned} -4x - 2x\lambda &= 0 \\ -16y - 2y\lambda &= 0 \end{aligned}\,.$$

Od $(0,0)$ *različne rešitve lahko pričakujemo, kadar velja* $\lambda = -2$ *ali* $\lambda = -8$*. V prvem primeru prva enačba drži za vsak* x*, iz druge pa sledi* $y = 0$*. Z upoštevanjem* $x^2 + y^2$ *dobimo točki* $(1,0)$ *in* $(-1,0)$*. Za* $\lambda = -8$ *je druga enačba izpolnjena za vsak* y*, iz prve pa sledi* $x = 0$*. Dobimo točki* $(0,1)$ *in* $(0,-1)$*.*

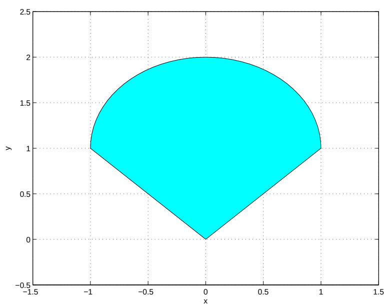
Ocenjevanje:

- *Lagrangova funkcija: 2 točki.*
- *Parcialna odvoda: 2 točki.*
- *Možni* λ*: 2 točki.*
- *Prvi par točk: 2 točki.*
- *Drugi par točk: 2 točki.*

3. (20) Naj bo telo G v prostoru presek krogle s polmerom R in središčem v točki $(0,0,R)$ in stožca z vrhom v izhodišču in osjo enako osi z, s katero plašč stožca oklepa kot $\pi/4$. V matematičnih oznakah je

$$G = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2, x^2+y^2 \leq z^2, z \geq 0\}\,.$$

Prerez telesa z xy-osjo je na sliki 1.



Sl. 1 Prerez telesa G z xz-ravnino.

a. (10) Izračunajte protornino telesa G.

Rešitev: Vpeljemo krogelne koordinate. Telo v krogelnih koordinatah opišemo z

$$G = \{(r,\theta,\phi)\colon 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq 2R\cos\theta\}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/4} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2R\cos\theta} r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{16\pi R^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{16\pi R^3}{3} \left(-\frac{\cos^4\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi} 4 \\
&= \frac{16\pi R^3}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) \\
&= \pi R^3\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Opis v krogelnih koordinatah: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Koordinato z težišča telesa G izračunamo kot

$$T_z = \frac{1}{V}\int_G z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Izračunajte T_z.

Rešitev: Uvedemo krogelne koordinate in računamo.

$$\begin{aligned}
\int_G z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/4}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\theta} r^3\,\mathrm{d}r \\
&= 8\pi R^4\int_0^{\pi/4}\cos^4\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 8\pi R^4\left(-\frac{\cos^5\theta}{5}\right)\Big|_0^{\pi}4 \\
&= 8\pi R^4\left(\frac{1}{5}-\frac{\sqrt{2}}{20}\right) \\
&= \frac{2(4-\sqrt{2})\pi R^4}{5}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$T_z = \frac{2(4-\sqrt{2})R}{5}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opis v krogelnih koordinatah: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično z

$$\Phi(u,v) = \left(\frac{1}{2}(e^v + e^{-v})\cos u, \frac{1}{2}(e^v + e^{-v})\sin u, \frac{1}{2}(e^v - e^{-v})\right)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $-a \leq v \leq a$.

a. (10) Izračunajte normalen vektor na ploskev $\mathcal{S}$ v točki $T(5\sqrt{2}/8, 5\sqrt{2}/8, 3/4)$.

Namig: $v = \log(2)$.

Rešitev: Računamo

$$\Phi_u = \left(-\frac{1}{2}(e^v + e^{-v})\sin u, \frac{1}{2}(e^v + e^{-v})\cos u, 0\right)$$

in

$$\Phi_v = \left(\frac{1}{2}(e^v - e^{-v})\cos u, \frac{1}{2}(e^v - e^{-v})\sin u, \frac{1}{2}(e^v + e^{-v})\right).$$

Sledi

$$\Phi_u \times \Phi_v = \left(\frac{1}{4}(e^v + e^{-v})^2\cos u, \frac{1}{4}(e^v + e^{-v})^2\sin u, -\frac{1}{4}(e^{2v} - e^{-2v})\right).$$

Iz namiga dobimo $v = \log 2$, *iz česar sledi* $u = \pi/4$. *Normalen vektor na ploskev bo*

$$\left(\frac{25\sqrt{2}}{32}, \frac{25\sqrt{2}}{32}, -\frac{15}{16}\right).$$

inOcenjevanje:

- Φ_u*: 2 točki.*
- Φ_v*: 2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*
- *Točka: 2 točki.*
- $\mathbf{n}$*: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, 0)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$, pri čemer naj bo normala v smeri $\Phi_u \times \Phi_v$.

Rešitev: Računamo po formuli.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{[0,2\pi]\times[-a,a]} \mathbf{F}\cdot(\Phi_u \times \Phi_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{[0,2\pi]\times[-a,a]} \frac{1}{8}(e^v + e^{-v})^3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{\pi}{4}\int_{-a}^{a}(e^v + e^{-v})^3\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{\pi}{4}\left(12(e^a - e^{-a}) + \frac{4}{3}(e^{3a} - e^{-3a})\right) \\
&= \pi\left(3(e^a - e^{-a}) + \frac{1}{3}(e^{3a} - e^{-3a})\right).
\end{aligned}$$

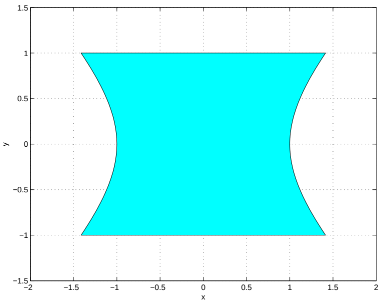
Ocenjevanje:

- $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$*: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bo telo G v prostoru dano z

$$G = \{(x, y, z) \colon -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2 + 1\}.$$

Prerez telesa z xy-ravnino je na sliki 2.



Sl. 2 Prerez telesa G z xz-ravnino.

a. (10) Naj bo $F = (x, y, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi tisti del površine ∂G, ki ne sovpada z ravnino $z = 1$ ali $z = -1$, torej skozi "ukrivljen" del površine telesa. Za normalo vedno izberite vektor, ki kaže iz telesa.

Rešitev: Opazimo, da je $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3$*, torej je po Gaussovem izreku pretok enak* $3V$*, kjer je* V *prostornina telesa. S pomočjo cilindričnih koordinat računamo*

$$\begin{aligned} V &= \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{r \leq \sqrt{1+z^2}} r\,\mathrm{d}r \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (1 + z^2)\mathrm{d}z \\ &= \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Pretok skozi celotno površino telesa je 8π*. Na vrhnjem krogu je normala enaka* $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ *in* $z = 1$*, zato je* $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}S$*. Pretok skozi vrhnjo ploskev je zato enak ploščini kroga s polmerom* $R = \sqrt{2}$*, torej* 2π*. Enako velja za spodnjo ploskev, za katero je* $z = -1$*. Ta pretoka moramo odšteti in dobimo, da je iskani pretok* 4π*.*

Ocenjevanje:

- *Divergenca in Gauss: 2 točki.*
- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Prostornina: 2 točki.*
- *Pretok skozi dodani ploskvi: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (-yz, xz, z^2)$. Izračunajte pretok tega polja skozi tisti del površine ∂G, ki ne sovpada z ravnino $z = -1$ ali $z = 1$, torej skozi ukrivljen del površine telesa G.

Rešitev: Izračunamo $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 2z$. *Pretok skozi celotno površino telesa je po Gaussovem izreku enak*

$$\int_G 2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0$$

zaradi simetrije. Prispevek zgornje ploskve je 2π, *prispevek spodnje pa* -2π. *Ker se prispevka dodanih ploskev uničita, je celoten pretok enak* 0.

Ocenjevanje:

- *Divergenca in Gauss: 2 točki.*
- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Integral: 2 točki.*
- *Pretok skozi dodani ploskvi: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*