FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

21. junij 2013

Ime in priimek: ______________________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo $f(u)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}$. Definirajte

$$F(x, y) = \sin x + f(\sin y - \sin x)\,.$$

a. (10) Izračunajte

$$\cos y \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \cos x \cdot \frac{\partial F}{\partial y}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x - f'(\sin y - \sin x) \cdot \cos x$$

in

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f'(\sin y - \sin x) \cdot \cos y\,.$$

Sledi

$$\cos y \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \cos x \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = \cos x \cos y\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravila: 2 točki.*
- $\frac{\partial F}{\partial x}$*: 2 točki.*
- $\frac{\partial F}{\partial y}$*: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\cos y \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \sin x \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \cos x \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,.$$

Rešitev: Potrebujemo mešane odvode. Označimo $u(x, y) = \sin y - \sin x$. *S pomočjo prvega dela naloge dobimo*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sin x + f''(u)\cos^2 x + f'(u) \cdot \sin x\,.$$

in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -f''(u) \cdot \cos y \cos x\,.$$

Vstavimo in sledi

$$\cos y \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \sin x \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \cos x \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -\sin x \cos y\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravila: 2 točki.*
- $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$*: 2 točki.*
- $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$*: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Naj bodo a, b in c dana števila, za katera velja $a > 0$ in $ab - c^2 > 0$. Funkcija $f\colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y) = -a \log y - \frac{b - 2cx + ax^2}{2y^2}\,.$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije f na njenem definicijskem območju.

Rešitev: Izračunamo parcialne odvode in jih izenačimo z 0. *Dobimo enačbi*

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial f}{\partial x} & = & -\frac{-2c+2ax}{2y^2} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & -\frac{a}{y} + \frac{b-2cx+ax^2}{y^3} & = 0 \end{array}$$

Iz prve enačbe sledi, da je $x = c/a$. *Drugo enačbo pomnožimo z* y^3, *kar lahko, ker je vedno* $y > 0$. *Vstavimo* $x = c/a$ *in dobimo*

$$-ay^2 + b - 2c^2/a + c^2/a = 0\,.$$

Sledi

$$y = \frac{\sqrt{ab - c^2}}{a}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi parcialni odvod: 2 točki.*
- *Drugi parcialni odvod: 2 točki.*
- *Rešitev prve enačbe: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rešitev druge enačbe: 2 točki.*

b. (10) Za stacionarne točke ugotovite ali so lokalni minimumi ali lokalni maksimumi.

Rešitev: Izračunamo

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & = & -\frac{a}{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & = & -\frac{2c-2ax}{y^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & = & \frac{a}{y^2} - \frac{3(b-2cx+ax^2)}{y^4}\,. \end{array}$$

Vstavimo stacionarno točko iz a. in dobimo

$$Hf(c/a, \sqrt{ab-c^2}/a) = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{ab-c^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2a^3}{ab-c^2} \end{pmatrix}$$

Matrika je diagonalna, obe vrednosti na diagonali pa sta negativni. Stacionarna točka je lokalni maksimum.

Ocenjevanje:

- *Prvi dvojni odvod: 2 točki.*
- *Drugi dvojni odvod: 2 točki.*
- *Tretji dvojni odvod: 2 točki.*
- *Hessova matrika v stacionarni točki:32 točke.*
- *Sklep: 3 točki.*

3. (20) Območje G naj bo krog dan s predpisom

$$G = \{(x, y)\colon (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}\,.$$

a. (10) Z uporabo polarnih koordinat izračunajte

$$\int_G x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Upoštevajte, da je

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)\,.$$

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate. V območje G se preslika območje

$$H = \{(r, \phi)\colon -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2\cos\phi\}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\int_G x\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y &= \int_H r^2\;\cos\phi\,\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\;\mathrm{d}\phi\int_0^{2\cos\phi} r^2\mathrm{d}r \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\phi\;\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{8}{3}\left(\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \pi\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Koti: 2 točki.*
- *$r(\phi)$: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte ploščino preseka območja G z območjem med premicama $y = ax$ in $y = bx$, kjer je $0 < a < b$. Kot znano upoštevajte, da je

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\,.$$

Rešitev: Razmislek je podoben kot v prvi točki, le kota tečeta od $\alpha = \operatorname{arctg} a$ *do* $\beta = \operatorname{arctg} b$. *Računamo*

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\phi \int_0^{2\cos\phi} r\mathrm{d}r &= 2\int_\alpha^\beta \cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= \left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right)\Big|_\alpha^\beta \\ &= \beta - \alpha + \frac{b}{1+b^2} - \frac{a}{1+a^2}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Koti: 2 točki.*
- $r(\phi)$*: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo dana parametrično s

$$\Phi(u,v) = (-\cos u + \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}\,v, -\cos u - \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}\,v, 2\cos u + \sqrt{2}v)$$

za $0 \le u \le 2\pi$ in $0 \le v \le a$.

a. (10) Poiščite enotski vektor, normalen na ploskev v točki $(\sqrt{3}+a, -\sqrt{3}+a, a)$.

Rešitev: Najprej preverimo, da je točka na ploskvi. Ugotovimo, da je

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{3}+a, -\sqrt{3}+a, a)\,,$$

torej je točka na ploskvi. Po formuli je normalen vektor na ploskev v dani točki enak

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|}\,.$$

Računamo

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} \sin u + \sqrt{3}\cos u \\ \sin u - \sqrt{3}\cos u \\ -2\sin u \end{pmatrix} \qquad \textit{in} \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\,.$$

Z vektorskim množenjem dobimo

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}\sin u - \sqrt{6}\cos u \\ -3\sqrt{2}\sin u - \sqrt{6}\cos u \\ 2\sqrt{6}\cos u \\ . \end{pmatrix}$$

Sledi

$$\begin{aligned} |\Phi_u \times \Phi_v|^2 &= 18\sin^2 u - 6\sqrt{2}\sqrt{6}\sin u\cos u + 6\cos^2 u + \\ &\qquad +18\sin^2 u + 2\sqrt{2}\sqrt{6}\sin u\cos u + 6\cos^2 u + \\ &\qquad +24\cos^2 u \\ &= 36(\sin^2 u + \cos^2 u) \\ &= 36\,. \end{aligned}$$

Dobimo

$$\mathbf{n} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Vrednosti parametrov: 2 točki.*
- Φ_u*: 2 točki.*
- Φ_v*: 2 točki.*
- *Vektorski produkt: 2 točki.*

– *Norma in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$. Za normalo si izberite vektor $(\Phi_u \times \Phi_v)/|\Phi_u \times \Phi_v|$.

Namig: Ko boste računali notranji integral v

$$\int_0^a \mathrm{d}v \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\, \mathrm{d}u\,,$$

upoštevajte, da se členi oblike $\cos u$, $\sin u$ *ali* $\cos u \sin u$ *integrirajo v* 0.

Rešitev: Po formuli za pretok je

$$\int_{[0,2\pi]\times[0,a]} \mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,.$$

Integral najprej pretvorimo v dvakratni integral

$$\int_0^a \mathrm{d}v \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\, \mathrm{d}u\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) = \\
&\quad = (-\cos u + \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}v)(3\sqrt{2}\sin u - \sqrt{6}\cos u) + \\
&\qquad + (-\cos u - \sqrt{3}\sin u + \sqrt{2}v)(-3\sqrt{2}\sin u - \sqrt{6}\cos u) + \\
&\qquad\quad + (2\cos u + \sqrt{2}v)(2\sqrt{6}\cos u)\,.
\end{aligned}$$

Ko vstavimo ta produkt v integral opazimo, da se vsi produkti $\cos u \sin u$ *ali* $\sin u$ *oziroma* $\cos u$ *integrirajo v* 0. *Notranji integral bo tako enak*

$$\int_0^{2\pi} (6\sqrt{6}\sin^2 u + 6\sqrt{6}\cos^2 u)\, \mathrm{d}u = 12\sqrt{6}\,\pi\,.$$

Ker je ta integral neodvisen od v, *je celotni pretok enak* $12\sqrt{6}\,a\,\pi$.

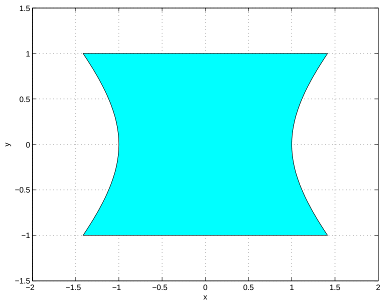
Ocenjevanje:

– *Formula: 2 točki.*
– *Vstavljanje komponent* $\mathbf{F}$*: 2 točki.*
– *Skalarni produkt: 2 točki.*
– *Integrali produktov in končni notranji integral: 2 točki.*
– *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bo telo G v prostoru dano z

$$G = \{(x,y,z)\colon -1 \le z \le 1, x^2+y^2 \le z^2+1\}\,.$$

Prerez telesa z xy-ravnino je na sliki 1.



Sl. 1 Prerez telesa G z xz-ravnino.

a. (10) Naj bo $F = (x, y, 1+z^3)$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi tisti del površine ∂G, ki ne sovpada z ravnino $z = 1$ ali $z = -1$, torej skozi "ukrivljen" del površine telesa. Za normalo vedno izberite vektor, ki kaže iz telesa.

Rešitev: Izračunamo $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3z^2$*. Po Gausovem izreku je pretok skozi celotno površino telesa enak integralu divergence. Računamo s pomočjo cilindričnih koordinat.*

$$\begin{aligned}
\int_G \operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-1}^{1} 3z^2\,\mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r\,\mathrm{d}r \\
&= 3\pi \int_1^1 z^2(1+z^2)\,\mathrm{d}z \\
&= 3\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right) \\
&= 2\pi\left(1+\frac{3}{5}\right) \\
&= \frac{16\pi}{5}\,.
\end{aligned}$$

Odšteti moramo še pretoka skozi kroga v ravninah $z = 1$ *in* $z = -1$*. Na spodnjem krogu je* $1+z^3 = 0$*, zato je pretok tam enak nič. Na zgornjem krogu je* $1+z^3 = 2$*, zato je pretok tam* 4π*. Sledi, da je iskani pretok enak*

$$\frac{16\pi}{5} - 4\pi = -\frac{4\pi}{5}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Divergenca in Gauss: 2 točki.*
- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*

- *Prostornina: 2 točki.*
- *Pretok skozi dodani ploskvi: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (y + z, -x - z, x - y)$. Izračunajte pretok tega polja skozi tisti del površine ∂G, ki ne sovpada z ravnino $z = -1$ ali $z = 1$, torej skozi ukrivljen del površine telesa G.

Rešitev: Opazimo $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$*. Zaradi simetrije sta pretoka skozi dodana kroga enaka* 0*, zato je tudi iskani pretok enak* 0*.*

Ocenjevanje:

- *Divergenca in Gauss: 2 točki.*
- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Integral: 2 točki.*
- *Pretok skozi dodani ploskvi: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*