FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

29. maj 1998

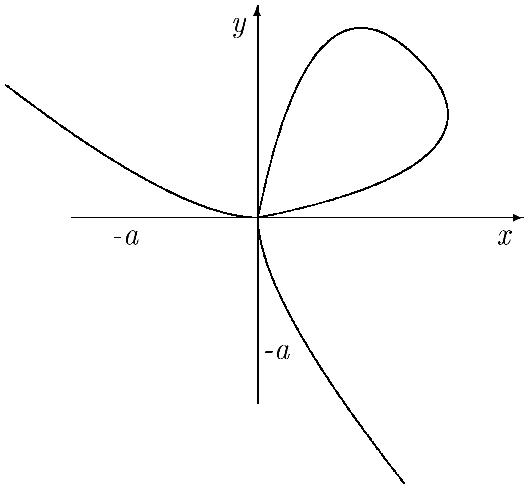
Ime in priimek: ____________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
Skupaj			

1. (20) Descartesov [1] list je podan z implicitno enačbo $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Potek te krivulje je na spodnji sliki.



a. (10) Izračunajte naklon tangente na Descartesov list v točki $(-2\sqrt[3]{2}\,a, \sqrt[3]{4}\,a)$.

Rešitev: Označimo $x_0 = -2\sqrt[3]{2}\,a$ *in* $y_0 = \sqrt[3]{4}\,a$. *Označimo še*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy\,.$$

Najprej preverimo, da je $f(x_0, y_0) = 0$. *Izračunamo*

$$f_x(x, y) = 3(x^2 - ay) \qquad in \qquad f_y(x, y) = 3(y^2 - ax)\,.$$

Ker je $f_y(x_0, y_0) = 12a^2\sqrt[3]{2} \neq 0$, *obstaja v okolici točke* x_0 *implicitna funkcija* $g(x)$, *taka da je* $f(x, g(x)) = 0$. *Naklon tangente je potem* $g'(x_0)$. *Potrebujemo še* $f_x(x_0, y_0) = 9a^2\sqrt[3]{4}$ *in dobimo*

$$g'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje* $f(x_0, y_0) = 0$: *2 točki.*
- *Preverjanje* $f_y(x_0, y_0) \neq 0$: *2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*

[1] René Descartes (1596–1650), francoski matematik

- *Formula za $g'(x_0)$: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) V kateri točki v prvem kvadrantu (izhodišča ne štejemo) je tangenta na Descartesov list vzporedna y–osi? Vašo trditev utemeljite z izrekom o implicitni funkciji.

Rešitev: Označimo točko, ki jo iščemo z (x, y). Po izreku o implicitni funkciji bo pri pogoju $f_x(x, y) \neq 0$ obstajala v okolici y funkcija $h(y)$, da bo $f(h(y), y) = 0$. Naklon tangente bo

$$h'(y) = -\frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)} = 0\,,$$

torej mora biti $f_y(x, y) = 3(y^2 - ax) = 0$. Sledi $y^2 = ax$. Točka mora ležati tudi na listu, kar pomeni da mora zadoščati enačbi $f(x, y) = 0$. To nam da

$$\frac{y^6}{a^3} + y^3 - 3a\frac{y^3}{a} = 0\,.$$

Pokrajšamo y^3 in dobimo $y = a\sqrt[3]{2}$ in $x = a\sqrt[3]{4}$. Zlahka se še prepričamo, da je $f_x(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}) \neq 0$.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da mora biti $f_y(x, y) = 0$: 4 točke.*
- *Preverjanje, da je $f(x, y) = 0$ za najdeno točko: 2 točki.*
- *Preverjanje, da je $f_x(x, y) \neq 0$: 2 točki.*
- *Utemeljitev s izrekom o implicitni funkciji, da je tangenta navpična: 2 točki.*

2. (20) Elipsoid postavimo v prostor, tako da je težišče v izhodišču, glavne osi elipsoida pa sovpadajo s koordinatnimi osemi. Matematično je elipsoid območje

$$G = \{(x,y,z)\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}\,.$$

a. (10) Izračunajte masni vrtilni vztrajnostni moment elipsoida s konstantno gostoto mase ρ okrog osi z, torej

$$I_{zz} = \rho \int_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Vpeljemo nekoliko spremenljene krogelne koordinate oblike

$$x = ar\sin\theta\cos\phi \quad y = br\sin\theta\sin\phi \quad z = cr\cos\theta\,.$$

Področje G se transformira v področje

$$H = \{(r,\phi,\theta)\colon 0\le r\le 1, 0\le\phi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi\}\,,$$

Jacobian te transformacije pa je $J = abcr^2\sin\theta$. Izračunati moramo torej

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \rho\int_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z \\
&= \rho abc\int_H (a^2r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + b^2r^2\sin^2\theta\sin^2\phi)\cdot r^2\sin\theta\;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\phi\;\mathrm{d}\theta \\
&= \rho abc\int_0^1 r^4\;\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin^3\theta\;\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\;\mathrm{d}\phi \\
&= \rho abc\frac{1}{5}\int_0^\pi \pi(a^2+b^2)\sin^3\theta\;\mathrm{d}\theta \\
&= \rho abc\frac{2\pi(a^2+b^2)}{5}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\;\mathrm{d}\theta \\
&= \rho abc\frac{2\pi(a^2+b^2)}{5}\int_0^1 (1-u^2)\;\mathrm{d}u \\
&= \rho abc\frac{2\pi(a^2+b^2)}{5}\cdot\frac{2}{3} \\
&= \frac{m(a^2+b^2)}{5}
\end{aligned}$$

Tukaj je m masa elipsioda.

Ocenjevanje:

- *Uvedba krogelnih koordinat: 2 točki.*
- *Preobrazba območja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_{G_+} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kjer je G_+ desna polovica elipsoida ($x \geq 0$). Utemeljite, da je integral dobro definiran.

Rešitev: Spet uvedemo nekoliko spremenljene krogelne koordinate. Integriramo ne-negativno funkcijo, zato bo integral dobro definiran, če obstaja.

$$\begin{aligned}
\int_{G_+} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{H_+} \frac{abcr^2\sin\theta}{r\sin\theta}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= abc\int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi}\,\mathrm{d}\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{abc\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Uvedba krogelnih koordinat: 2 točki.*
- *Preobrazba območja: 2 točki.*
- *Jacobian in Fubini: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da je integral dobro definiran: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo na $\mathbb{R}^3$ dano vektorsko polje $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

a. (10) Izračunajte pretok vektorskega polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev, ki je graf funkcije $z = f(x, y) = 1 - x - y$ na območju $G = \{(x, y)\colon x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 1\}$. Za normalo si izberite vektor $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Rešitev: Z odvajanjem ugotovimo $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 0$. *Po Gaussovem izreku je potem*

$$\int_{\partial\Delta} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Delta} \mathrm{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

kjer je Δ piramida, ki jo omejujejo dana ploskev in koordinatne ravnine. Pretok skozi dano ploskev je torej enak pretoku skozi ostale tri ploskve z nasprotnim predznakom. Izračunajmo recimo pretok skozi G, ki je ena od ploskev piramide. Normala je zdaj $-\mathbf{k}$ in tako

$$\int_{G} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{24}\,.$$

Zaradi simetrije je pretok enak skozi ostali dve ploskvi piramide in je tako iskani pretok enak $-3 \cdot \frac{-1}{24} = \frac{1}{8}$.

Ocenjevanje:

- *Izračun divergence: 2 točki.*
- *Ideja z Gaussovim izrekom: 2 točki.*
- *Izračun pretoka skozi stranske ploskve piramide: 2 točki.*
- *Sklep s predznaki: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $K = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Izračunajte pretok $\mathbf{F}$ skozi ploskve K, ki ležijo v koordinatnih ravninah. Za normalo si vedno izberite vektor, ki kaže v smeri ene od koordinatnih osi.

Rešitev: Izračunajmo najprej pretok skozi ploskev $\mathcal{S}_1$, ki leži v xy–ravnini. Normala na to ploskev je $\mathbf{k}$ in dobimo

$$\int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{Q_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\,.$$

Pri tem je $Q_1 = [0, 1] \times [0, 1]$, integral na desni pa zlahka izračunamo po Fubinijevem izreku. Upoštevali smo tudi, da je $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Popolnoma na enak način izračunamo še pretok skozi ostali dve ploskvi. Končni rezultat je $\frac{3}{4}$.

Ocenjevanje:

- *Pretvorba na dvojne integrale: 4 točke.*
- *Integral po posameznih ploskvah: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ena od Maxwellovih enačb pravi, da je za magnetno polje $\mathbf{B}$ v prostoru vedno $\mathbf{div}(\mathbf{B}) = 0$. Iz tega sledi, da lahko polje $\mathbf{B}$ vedno zapišemo kot $\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})$ za primerno vektorsko polje $\mathbf{A}$.

a. (10) Naj bo $\mathbf{A} = -yz^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{B}$ skozi površino valja danega z $V = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 \le a^2, 0 \le z \le b\}$ brez osnovne in zgornje ploskve. Pretok torej računamo samo skozi ukrivljen del površine valja, normalo pa si izberimo tako, da kaže stran od osi z.

Rešitev: Če bi valju dodali osnovno ploskev v xy-ravnini, se pretok ne bi spremenil, ker je polje $\mathbf{B}$ *v xy-ravnini enako 0. Za to na pol zaprto ploskev, ki jo označimo s* $\mathcal{S}$*, lahko uporabimo Stokesov izrek.*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathcal{S} &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{A})\,\mathrm{d}\mathcal{S} \\ &= \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A}\,\mathrm{d}\mathbf{r} \end{aligned}$$

Za izračun tega zadnjega integrala moramo rob zgornje ploskve valja preteči v smeri urinega kazalca. Parametrično to krivuljo opišemo z

$$x(t) = a\cos t \qquad y(t) = -a\sin t \qquad z(t) = b$$

za $0 \le t \le 2\pi$*. Dobimo*

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A}\,\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (-ab^2\sin^2 t - ab^2\cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= -2ab^2\pi \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z dodajanjem spodnje ploskve: 2 točki.*
- *Prevedba na krivuljni integral: 2 točke.*
- *Citiranje Stokesovega izreka: 2 točki.*
- *Izračun krivuljnega integrala: 4 točke.*

b. (10) Kakšen bi bil pretok $\mathbf{B}$ skozi zgornjo polovico krogle s polmerom R brez dela zgornje polovice v xy-ravnini? Za normalo izberite tisto, ki gleda kot hudič iz krugle.

Rešitev: Spet lahko uporabimo Stokesov izrek in predvedemo integral na krivuljni integral. Ce označimo površino zgornje polovice krogle s $\mathcal{S}$ dobimo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathcal{S} &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{A})\, \mathrm{d}\mathcal{S} \\ &= \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A}\, \mathrm{d}\mathbf{r} \end{aligned}$$

Ker je rob $\partial\mathcal{S}$ v xy-ravnini in je tam polje $\mathbf{A}$ enako 0, mora biti tudi pretok skozi ploskev enak 0.

Ocenjevanje:

- *Prevedba na krivuljni integral: 4 točke.*
- *Opaženje, da je vektorsko polje v ravnin xy enako 0: 4 točke.*
- *Sklep: 4 točke.*

5. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo na $[-\pi,\pi]$ definirana s predpisom

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{za } -\pi/2\le x\le \pi/2\\ 0 & \text{sicer}\end{cases}$$

a. (10) Dokažite, da je

$$f(x)=\frac{\sin x}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n\sin(2nx)}{4n^2-1}.$$

Utemeljite, zakaj Fourierova vrsta za $-\pi/2<x<\pi/2$ konvergira proti $f(x)$.

Rešitev: Najprej opazimo, da je $f(x)$ liha in so zato vsi a_n enaki 0. Izračunamo najprej

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Za $n>1$ računamo

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} sinx\sin(nx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(n-1)x-\cos(n+1)x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\sin(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\Big)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\end{aligned}$$

Če je n lih, potem je $b_n=0$. Če je $n=2m$ sod, dobimo

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{(-1)^{m+1}}{n-1}-\frac{(-1)^m}{n+1}\Big)\\ &= \frac{(-1)^{m+1}2n}{2\pi(n^2-1)}\end{aligned}$$

Če pokrajšamo in vstavimo $2m$ namesto n dobimo

$$b_{2m}=\frac{(-1)^{m+1}2m}{\pi(4m^2-1)}$$

Fourierovo vrsto seštevamo zdaj po m namesto po n in dobimo točno zgornji rezultat. Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki $(-\pi/2,\pi/2)$, ker je $f(x)$

odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva in na $-\pi/2 < x < \pi/2$ velja $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je $f(x)$ liha: 2 točki.*
- *Izračun b_1: 2 točki.*
- *Izračun b_k: 2 točki.*
- *Fourierova vrsta: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Uporabite a. za izračun vsote neskončne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-1)}{4(2n-1)^2 - 1} = \frac{2}{3} - \frac{6}{35} + \frac{10}{99} - \cdots$$

Rešitev: Za $x = \pi/4$ Fourierova vrsta konvergira in lahko zapišemo

$$f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n \sin(n\pi/2)}{4n^2 - 1}$$

V neskončni vrsti na desni ostanejo samo členi za lihe n in dobimo točno vrsto, ki jo želimo izračunati. Dobimo

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-1)}{4(2n-1)^2 - 1}$$

Ocenjevanje:

- *$x = \pi/4$: 4 točke.*
- *Samo lihi členi so različni od 0: 2 točki.*
- *Vsota neskončne vrste: 4 točke.*

6. (20) Dana je diferencialna enačba prvega reda

$$y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0\,. \tag{1}$$

a. (10) Dokažite, da funkcija $z(x) = 1/y^3(x)$ zadošča nehomogeni linearni diferencialni enačbi

$$z' - \frac{3}{1+x}z = 3(1+x)\,.$$

Rešitev: Enačba je Bernoullijeva. Z odvajanjem dobimo $z' = -3y'/y^4$ ali $y' = -z'y^4/3$. Če vstavimo ta izraz za y' v enačbo dobimo

$$-\frac{z'y^4}{3} + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0\,.$$

Delimo še z y^4 in množimo z -3. Dobimo

$$z' - \frac{3z}{1+x} = 3(1+x)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje z: 4 točke.*
- *Vstavljanje v enačbo: 4 točke.*
- *Krajšanje in sklep: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe **??**, za katero je $y(0) = -1$.

Rešitev: Enačba v a. je nehomogena linearna prvega reda. Rešitev homogene enačbe je $z = c(1+x)^3$, rešitev nehomogene pa iščemo z običajnim nastavkom $z = (1+x)^3 v$ (za c si lahko izberemo 1). Vstavimo v enačbo in dobimo

$$3(1+x)^2 v + (1+x)^3 v' - \frac{3(1+x)^3 v}{1+x} = 3(1+x)\,.$$

Prvi in tretji člen na levi se uničita in dobimo $(1+x)^3 v' = 3(1+x)$ in z integriranjem $v(x) = -3/(1+x)$. Splošna rešitev nehomogene enačbe je

$$z(x) = -3(1+x)^2 + c(1+x)^3\,.$$

Ker je $y(0) = 1$ *natanko takrat, ko je* $z(0) = -1$*, določimo konstanto iz tega pogoja, torej* $z(0) = -3 + c = -1$*, ali* $c = 2$*. Iskana rešitev je*

$$z(x) = -3(1+x)^2 + 2(1+x)^3 .$$

Rešitev za y *dobimo kot* $y = z^{-1/3}$*.*

Ocenjevanje:

- *Uporaba* z *iz a.: 2 točki.*
- *Rešitev homogene enačbe: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Splošna rešitev nehomogene enačbe: 2 točki.*
- *Določitev konstante: 2 točki.*

7. (20) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko sistema diferencialnih enačb $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

Rešitev: Karakteristični polinom matrike $\mathbf{A}$ *je* $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ *z dvojno ničlo* $\lambda = 1$. *Pripadajoči lastni vektor je* $x = (1,2)^T$. *Ena rešitev je torej* $\mathbf{y}_1(t) = e^t\mathbf{x}$. *Poiskati moramo še eno, od prve neodvisno, rešitev. Ker je lastni vektor samo eden, uporabimo nastavek* $\mathbf{y}_2(t) = e^t(t\mathbf{x} + \mathbf{u})$. *Vektor* $\mathbf{u}$ *mora zadoščati enačbi* $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{x}$. *Zlahko najdemo* $\mathbf{u} = (1/2, 1/2)^T$. *Iz tega dobimo*

$$\mathbf{y}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} t + 1/2 \\ 2t + 1/2 \end{pmatrix}.$$

Stolpca fundamentalne matrike bosta linearni kombinaciji $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$. *Prvi stolpec mora biti za* $t = 0$ *enak* $(1,0)^T$, *torej* $c_1 + c_2/2 = 1$ *in* $2c_1 + c_2/2 = 0$. *Sledi* $c_1 = -1$ *in* $c_2 = 4$. *Podobno dobimo za drugi stolpec enačbi* $c_1 + c_2/2 = 0$ *in* $2c_1 + c_2/2 = 1$, *z rešitvijo* $c_1 = 1$ *in* $c_2 = -2$. *Fundamentalna matrika bo*

$$\mathbf{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 4t + 1 & -2t \\ 8t & -4t + 1 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Lastna vrednost: 2 točki.*
- *Lastni vektor: 2 točki.*
- *Nastavek za dugo rešitev: 2 točki.*
- *Druga linearno neodvisna rešitev: 2 točki.*
- *Fundamentalna matrika: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, ki ustreza pogoju $\mathbf{y}(1) = (0,1)^T$.

Rešitev: Vse rešitve so oblike $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}$ *za primeren fiksen vektor* $\mathbf{c}$. *Iz zahteve* $\mathbf{y}(1) = (0,1)$ *dobimo*

$$e \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sledi $\mathbf{c} = (2/e, 5/e)$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek za splošno rešitev: 4 točke.*
- *Rešitev: 6 točk.*

8. (20) Po zakonu o vplivu mas v kemiji je hitrost reakcije med dvema reagentoma odvisna od njune koncentracije. Če predpostavimo začetni koncentraciji a in b (v molih na volumsko enoto), in označimo z $y(t)$ količino nastale spojine (v molih) v času t , potem funkcija y ustreza diferencialni enačbi

$$y' = k(a-y)(b-y)\,,$$

kjer je k primerna konstanta. Predpostavite še $0 < a < b$.

a. (10) Poiščite rešitev zgornje enačbe pri začetnem pogoju $y(0) = 0$.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$\frac{y'}{(a-y)(b-y)} = k\,.$$

Obe strani integriramo (recimo z razstavljanjem na parcialne ulomke) in dobimo

$$\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b-y}{a-y}\right) = kt + c\,.$$

Konstanto c določimo iz začetnega pogoja. Za $t = 0$ mora biti

$$\frac{1}{b-a}\log(\frac{b}{a}) = c\,.$$

Torej je rešitev podana z enačbo

$$\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{a(b-y)}{b(a-y)}\right) = kt \qquad (*)$$

Izračunamo še y iz zgornje enačbe in dobimo

$$y(t) = \frac{ab(1-e^{-k(b-a)t})}{b-ae^{-k(b-a)t}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe v obliko z integriranje: 2 točke.*
- *Intergriranje: 4 točk.*
- *Enačba za konstanto c: 2 točke.*
- *Končna rešitev: 2 točke.*

b. (10) V času $t = 0$ je $y(0) = 0$. Pokažite, da je čas, ki je potreben, da nastane $a/2$ molov spojine enak

$$t = \frac{1}{k(b-a)} \log\left(\frac{2b-a}{b}\right)$$

Rešitev: Uporabimo $(*)$ *in dobimo*

$$kt = \frac{1}{b-a} \log\left(\frac{a(b-y)}{b(a-y)}\right) .$$

Ko bo $y(t) = a/2$ *bo veljalo*

$$kt = \frac{1}{b-a} \log\left(\frac{a(b-a/2)}{b(a-a/2)}\right) .$$

Iz tega izračunamo t.

Ocenjevanje:

- *Nastavitev enačbe: 5 točk.*
- *Rešitev: 5 točk.*