FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

12. maj 2000

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R}^2\backslash(0,0) \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y) = y - \frac{b^2 y}{x^2+y^2}\,,$$

za nek $0 < b < 1$.

a. (10) Poiščite možne vezane ekstreme funkcije f pri pogoju $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$.

Rešitev: Po Lagrangeu definiramo $F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ in odvajamo parcialno po x in y. Dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{2b^2xy}{(x^2+y^2)^2} - 2\lambda x \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 1 + \frac{b^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} - 2\lambda y
\end{aligned}$$

Parcialne odvode izenačimo z 0 in upoštevamo $x^2+y^2 = 1$. Sledi $2b^2xy - 2\lambda x = 0$ in $1 + b^2(y^2-x^2) - 2\lambda y = 0$. Iz prve enačbe sledi, da je ali $x = 0$, ali $\lambda = b^2 y$. Če je $x = 0$, je $y = \pm 1$ in mora biti $\lambda = \pm(1+b^2)/2$. Če je $x \neq 0$, je $\lambda = b^2 y$ in zato po drugi enačbi

$$1 + b^2(y^2 - (1-y^2)) + 2b^2y^2 = 1 - b^2 > 0$$

za vse y. Edini možni stacionarni točki sta $(0,1)$ in $(0,-1)$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z Lagrangeom: 2 točki.*
- *Parcialna odvoda: 2 točki.*
- *Možne rešitve: 2 točki.*
- *Eliminacija ene rešitve: 2 točki.*
- *Stacionarni točki: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $(x_0, y_0) = (a, a)$ za poljuben $a > 0$. Pokažite, da obstajata odvedljivi funkciji h in k definirani na okolicah U in V točk x_0 in y_0, taki da je $h(x_0) = y_0$, $k(y_0) = x_0$ in velja $f(x, h(x)) = f(x_0, y_0)$ za $x \in U$ in $f(k(y), y) = f(x_0, y_0)$ za $y \in V$. Izračunajte še $[k(h(x))]'$ (upoštevajte, da je $k(h(x)) = x$).

Rešitev: Uporabili bomo izrek o implicitni funkciji. Vemo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2b^2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

in

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \frac{b^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Za točko (a,a) je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = b^2/2a^2 > 0$$

in

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,a) = 1 > 0\,.$$

Izrek o implicitni funkciji nam zagotavlja obstoj zahtevanih funkcij. Po formuli je

$$h'(x) = -\frac{f_x(x,h(x))}{f_y(x,h(x))}$$

in

$$k'(y) = -\frac{f_y(k(y),y)}{f_x(k(y),y)}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
[k(h(x))]' &= k'(h(x))h'(x) \\
&= -\frac{f_y(k(h(x)),h(x))}{f_x(k(h(x)),h(x))} \cdot -\frac{f_x(x,h(x))}{f_y(x,h(x))} \\
&= -\frac{f_y(x,h(x))}{f_x(x,h(x))} \cdot -\frac{f_x(x,h(x))}{f_y(x,h(x))} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da potrebujemo izrek o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Izračun gradienta: 2 točki.*
- *Pojasnilo glede uporabe izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Formuli za odvoda: 2 točki.*
- *Izpeljava identitete: 2 točki.*

2. (20) Cilinder $H = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$ naj ima gostoto mase enako $\rho(x,y,z) = y^2 + z^2$.

a. (10) Izračunajte maso cilindra.

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate in dobimo

$$\begin{aligned} m &= \int_H \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V \\ &= \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a (r^2 \sin^2\phi + z^2) \cdot r\,\mathrm{d}r \\ &= h \cdot \pi \cdot \frac{a^4}{4} + 2\pi \cdot \frac{h^3}{3}\frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Meje za cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Srednji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte masni vztrajnostni moment I_{zz} cilindra H okrog osi z.

Rešitev: Izračunati je potrebno

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_H (x^2 + y^2) \cdot \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V \\ &= \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a r^2 \cdot (z^2 + r^2 \sin^2\phi) \cdot r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi h^3}{3}\frac{a^4}{4} + h\pi\frac{a^6}{6} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula za I_{xx}: 2 točke.*
- *Meje za cilindrične koordinate in Jacobian: 2 točke.*
- *Notranji integral: 2 točke.*
- *Srednji integral: 2 točke.*
- *Rezultat: 2 točke.*

3. (20) Naj bo P "četrtinka" krogle $P = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$ in naj bo dana ploskev $\mathcal{S} = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0\}$. Vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$ naj bo dano z $\mathbf{F} = (z^2, x^2, y^2)$.

a. (10) Izračunajte

$$\int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

kjer za $\mathbf{n}$ izberemo vektor, ki kaže iz telesa P.

Rešitev 1: Izračunajmo najprej krivuljni integral po delu poti v xz-ravnini. Parametrizacija tega dela je $\mathbf{r}(t) = (\sin t, 0, \cos t)$ za $0 \le t \le \pi$. Vstavimo in dobimo

$$I_1 = \int_0^\pi -\cos^3 t\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Izračunamo še integral po delu krivulje v yz-ravnini. Ustrezna parametrizacija je $\mathbf{r}(t) = (0, \sin t, -\cos t)$ za $0 \le t \le \pi$. Dobimo

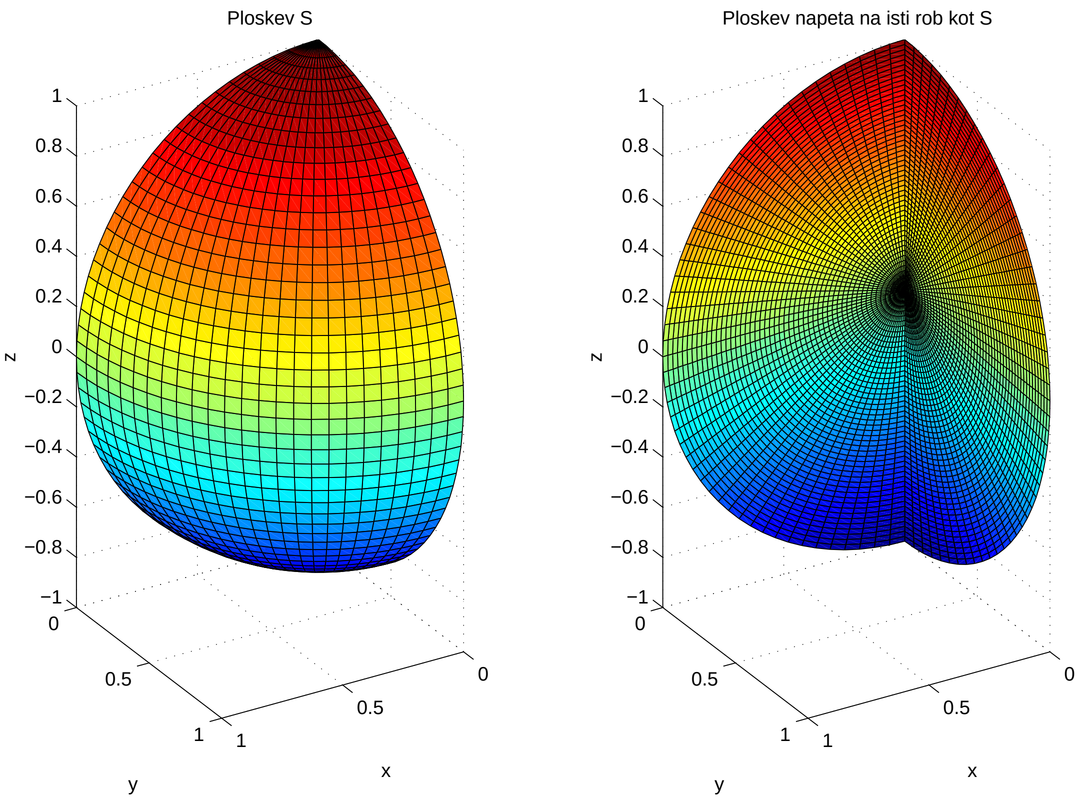
$$I_2 = \int_0^\pi \sin^3 t\, \mathrm{d}t = \frac{4}{3}\,.$$

Celoten pretok je $4/3$.

Ocenjevanje:

- *Razbitje integrala na tri dele: 2 točke.*
- *Parametrizacija vsakega dela: 2 točke.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točke.*
- *Integral po vsakem delu: 2 točke.*
- *Rezultat: 2 točke.*

Rešitev 2: Izračunamo $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (2y, 2z, 2x)$. Vemo, da je krivuljni integral enak pretoku rotorja, ne glede na to, katero ploskev "napnemo" na krivuljo. Na sliki 1 je ploskev $\mathcal{S}$ in ploskev, ki si jo lahko izberemo namesto nje.



Sl. 1 Dve možni ploski, ki ju lahko "napnemo" na ∂S.

Ugotovimo, da je

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Oglejmo si najprej del površine krhlja v xz-ravnini. Normala je $(0,1,0)$ in dobimo za pretok formulo

$$\int_{\partial P\cap y=0} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{x^2+z^2\le 1, x\ge 0} (2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,.$$

Zaradi simetrije je integral enak 0. Za površino krhlja v yz-ravnini vzamemo normalo $(1,0,0)$ in dobimo

$$\int_{\partial P\cap x=0} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{y^2+z^2\le 1, y\ge 0} 2y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Z uporabo polarnih koordinat dobimo rezultat $4/3$.

Ocenjevanje:

- *Izračun rotorja: 2 točke.*
- *Uporaba Stokesovega izreka: 2 točke.*
- *Izračun integralov po stranskih ploskvah: 4 točk.*
- *Rezultat: 2 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Rešitev: Najprej izračunamo $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 0$. *Pretok vektorskega polja skozi ploskev* $\mathcal{S}$ *je po Gaussovem izreku enak negativnemu pretoku skozi ostali dve ploskvi (polovici krogov) telesa* P *v* xz*-ravnini in* yz*-ravnini. Oglejmo si najprej pretok skozi del* ∂P *v* xz*-ravnini. Za normalo si izberemo* $(0,-1,0)$ *in dobimo z vpeljavo polarnih koordinat*

$$\begin{aligned} \int_{\partial P \cap y=0} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{x^2+z^2 \le 1, x \ge 0} (-x^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= -\frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Enak integral dobimo za drugo ploskev, zato je

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izračun divergence: 2 točki.*
- *Sklep s stranskimi ploskvami in Gaussovim izrekom: 2 točki.*
- *Izračun pretoka skozi stranske ploskve: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Dana naj bo linearna diferencialna enačba

$$y'' - 3y' + 2y = f(t)\,.$$

a. (10) Naj bo $f(t) = e^t$. Rešite enačbo pri začtenih pogojih $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Najprej rešimo homogeno enačbo. Ničli karakterističnega polinoma sta $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$. Linearno neodvisni rešitvi homogenega sistema sta $y_1(t) = e^t$ in $y_2(t) = e^{2t}$.

Za rešitev nehomogene enačbe potrebujemo partikularno rešitev. Ker je $\lambda = 1$ rešitev karakterističnega polinoma, bo nastavek oblike $y_p(t) = cte^t$ za neko konstanto c. Računamo

$$\begin{aligned} y'(t) &= ce^t(1+t) \\ y''(t) &= ce^t(2+t) \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$ce^t((2+t) - 3(1+t) + 2t) = e^t\,.$$

Sledi $c = -1$. Iskana rešitev bo oblike

$$y(t) = -te^t + c_1e^t + c_2e^{2t}\,.$$

Računamo

$$y(0) = c_1 + c_2 \qquad \text{in} \qquad y'(0) = -1 + c_1 + 2c_2\,.$$

Sledi $c_1 = -1$ in $c_2 = 1$.

Ocenjevanje:

- *Rešitvi homogene enačbe: 2 točki.*
- *Nastavek za nehomogeno: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbi za konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite splošno rešitev, če je $f(t) = \cos t$.

Rešitev: V tem primeru $\lambda = i$ ni ničla karakterističnega polinoma, zato partikularno rešitev iščeno z nastavkom $y_p(t) = Ae^{it}$, prav tako pa desno stran enačbe pretvorimo v e^{it}. Odvajamo in vstavimo v enačbo in dobimo

$$Ae^{it}(-1 - 3i + 2) = e^{it}\,.$$

Sledi

$$A = \frac{1}{1-3i} = \frac{1+3i}{10}\,.$$

Razberemo, da bo partikularna rešitev realni del produkta Ae^{it}, torej

$$y_p(t) = \frac{1}{10}(\cos t - 3\sin t)\,.$$

Splošna rešitev enačbe bo seveda

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek, kompleksni ali drugačen: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje: 2 točki.*
- *Izračun konstante: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

5. (20) Kot znano upoštevajte, da velja

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{in} \qquad \int_0^{\pi} \cos^{2m} x \, \mathrm{d}x = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3 \cdot 1 \cdot \pi}{m! \, 2^m} \qquad \text{za } m > 0.$$

a. (10) Naj bo

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos u} \, \mathrm{d}u \, .$$

Izpeljite, da je

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \, .$$

Utemeljite vse vaše korake.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
I_0(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos u} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \cos^k u}{k!} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \int_0^{\pi} \cos^k u \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\pi} \cos^{2k} u \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots \pi}{k! \, 2^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 \, 2^{2k}}
\end{aligned}$$

Vrsti red seštevanja in integriranja smo lahko zamenjali, ker so členi v vsoti majorizirani z vrsto $\sum_k \pi^k/k!$, ki seveda konvergira. Upoštevali smo tudi, da je

$$\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{(2k)!} = \frac{1}{k! \, 2^k} \, .$$

Ocenjevanje:

- *Razvoj integranda v vrsto: 2 točki.*
- *Utemeljitev zamenjave integriranja in seštevanja: 2 točki.*
- *Integriranje vsakega člena: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da velja

$$x^2 I_0'' + x I_0' - x^2 I_0 = 0 \, .$$

Utemeljite vaše korake.

Rešitev: Izračunamo radij konvergence potenčne vrste. Hitro se prepričamo, da je

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0\,.$$

Radij konvergence je $R=\infty$. Vrsto zato lahko povsod poljubno odvajamo po členih. Računamo

$$\begin{aligned} x^2 I_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(k!)^2 2^{2k}} \\ x I_0'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \\ x^2 I_0''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k(2k-1) x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \end{aligned}$$

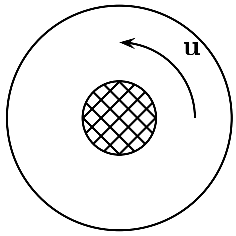
V vseh treh vrstah je najnižja potenca x^2. Seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} x^2 I_0'' + x I_0' - x^2 I_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2}\Big(2k(2k-1) + 2k - 4k^2\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Radij konvergence: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje: 2 točki.*
- *Zbiranje členov: 2 točki.*
- *Krajšanje na koncu: 2 točki.*

6. (20) Viskozna nestisljiva tekočina je med dvema neskončnima vrtečima se koncentričnima valjema s polmeroma a in b kot na sliki 1.



Slika 1 Tekočina med koncentričnima valjema s polmeroma a in b.

Hitrost tekočine opisuje vektorsko polje

$$\mathbf{u} = \left(\frac{-\Omega a^2}{b^2 - a^2} + \frac{\Omega a^2 b^2}{(b^2 - a^2)(x^2 + y^2)} \right) \cdot (-y, x, 0)\,,$$

kjer je Ω pozitivna konstanta.

a. (10) Pokažite, da polje $\mathbf{u}$ res opisuje tok nestisljive tekočine.

Rešitev: Pokazati je potrebno, da je $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{2\Omega a^2 b^2 xy}{(b^2 - a^2)(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial u_2}{\partial y} &= -\frac{2\Omega a^2 b^2 xy}{(b^2 - a^2)(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial u_3}{\partial z} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Sledi, da je divergenca enaka 0.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je potrebno izračunati divergenco: 2 točki.*
- *Formula za divergenco: 2 točki.*
- *Parcialni odvod po x: 2 točki.*
- *Parcialni odvod po y: 2 točki.*
- *Slep: 2 točki.*

b. (10) Vektorsko polje $\mathbf{u}$ ustreza Navier-Stokesovi enačbi

$$\rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \triangle \mathbf{u}\,,$$

kjer je $\triangle \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}$. Izračunajte ∇p.

Rešitev: Označimo $\kappa = \frac{\Omega a^2}{b^2-a^2}$. *Iz Navier-Stokesove enačbe sledi, da je*

$$\nabla p = \mu \triangle \mathbf{u} - \rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\,.$$

Računamo

$$\nabla \mathbf{u} = \kappa \begin{pmatrix} \frac{2b^2xy}{(x^2+y^2)^2} & -1 - \frac{b^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ 1 + \frac{b^2(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2b^2xy}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Torej je

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \kappa^2 \begin{pmatrix} x - \frac{b^4 x}{(x^2+y^2)^2} \\ y - \frac{b^4 y}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunati je potrebno še $\triangle \mathbf{u}$. *Izračunajmo najprej*

$$\triangle u_1 = \frac{2\,b^2\,y\,(-3\,x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} + \frac{-2\,b^2\,y\,(-3\,x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = 0\,.$$

Podobno je seveda $\triangle u_2 = 0$, *zato* $\triangle \mathbf{u} = 0$. *Sledi*

$$\nabla p = -\rho\kappa^2 \begin{pmatrix} x - \frac{b^4 x}{(x^2+y^2)^2} \\ y - \frac{b^4 y}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Izračun* $\nabla \mathbf{u}$: *2 točki.*
- *Izračun* $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} L$: *2 točki.*
- *Izračun* $\triangle u_1$: *2 točki.*
- *Izračun* $\triangle u_2$: *2 točki.*
- *Uporaba Navier-Stikesove enačbe in rezultat: 2 točki.*