FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

Pisni izpit

5. maj 2011

Ime in priimek: ______________________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f(x, y)$ naj bo dana z

$$f(x, y) = \log\left(e^x + e^y\right) .$$

a. (10) Izračunajte

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} .$$

b. (10) Izračunajte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 .$$

2. (20) Pokončna piramida naj ima za osnovno ploskev kvadrat s stranico $2x$. Višino stranskih trikotnikov označimo z y. Prostornina V in površina P piramide sta dani s formulama

$$V = \frac{4}{3}x^2\sqrt{y^2 - x^2} \qquad \text{in} \qquad P = 4x^2 + 4xy\,.$$

a. (10) Pokažite, da je za piramido s prostornino $V = 4/3$ najmanjša možna površina stranskih ploskev, ki je $4xy$, dosežena pri

$$x = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \qquad \text{in} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{2}}\,.$$

Preverite, da zgornja x in y zadoščata pogoju in eksplicitno navedite λ.

b. (10) Za piramido s prostornimo $V = 4/3$ je najmanjša možna površina dosežena pri

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{in} \qquad y = \frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

Pokažite, da zgornja trditev drži. Preverite, da navedena x in y ustrezata pogoju in eksplicitno navedite λ.

3. (20) Naj bo

$$G = \{(x, y)\colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq \sqrt{3}x\}\,.$$

a. (10) Površino krogle s središčem v izhodišču in polmerom $R = 3$ nad območjem G izračunamo z

$$\int_G \frac{3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\,.$$

Izračunajte ta integral.

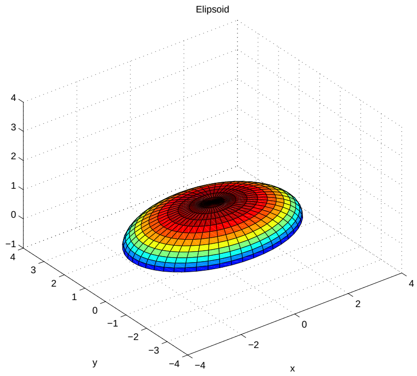
b. (10) S pomočjo polarnih koordinat izračunajte

$$\int_G \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

4. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ na sliki 1 je dana parametrično s

$$\Phi(u, v) = (a \sin v \cos u, b \sin v \sin u, c \cos v)$$

za $0 \leq u \leq 2\pi$ in $0 \leq v \leq \pi/2$.

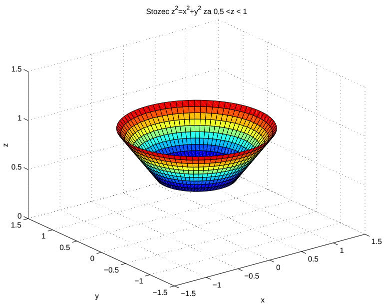


Sl. 1 Ploskev $\mathcal{S}$.

a. (10) Zapišite enotski normalni vektor na ploskev v točki $T(a/2, b/2, c\sqrt{2}/2)$.

b. (10) Privzemite, da je $a = b$. Naj bo dano vektorsko polje $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$. Za normalo izberite tisto s pozitivno z-komponento.

5. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo del plašča stožca med višinama $z = 1/2$ in $z = 1$ kot na sliki 2. Formalno je ploskev dana z $z^2 = x^2 + y^2$ za $1/2 \leq z \leq 1$.



Sl. 2 Ploskev $\mathcal{S}$.

a. (10) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 0, y)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi dano ploskev. Za normalo izberite vedno tisti vektor s pozitivno z-komponento.

b. (10) Naj bo $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, -z, x)$. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$, pri čemer si za normalo izberite vedno vektor s pozitivno z-komponento.